

A KOMBINATIV KÉPESSÉG FEJLESZTHETŐSÉGÉNEK
VIZSGÁLATA AZ ÁLTALÁNOS ISKOLA
NEGYEDIK OSZTÁLYÁBAN

Egyetemi doktori értekezés

Dr. Csatlósné Pülöp Sára

Szeged, 1985

T A R T A L O M

BEVEZETÉS

I. A VIZSGÁLAT ELMÉLETI HÁTTERE	7
1. A képesség fogalmának értelmezése	7
1.1. A képességekre és fejlesztésükre vonatkozó néhány felfogás	7
1.2. A vizsgálathoz felhasznált képességkonceptió	16
2. A kombinatív képesség	23
2.1. A kombinativitás problémái	23
2.2. A kombinatív képesség elméleti koncepciója	25
II. KOMBINATORIKA ÉS A KÉPESSÉGFEJLESZTÉS	31
1. A kombinatorika általános elemzése	31
2. A matematikatanítás korszerűsítése a képességfejlesztés szempontjából	36
2.1. Matematikatanítási kísérletek	36
2.2. Tantervi változások	42
3. A kombinatorika helye, szerepe a jelenlegi matematika tantárgyban alsó tagozaton	44
III. A KOMBINATÍV KÉPESSÉG FEJLESZTÉSÉRE KIALAKÍTOTT PROGRAM	51
1. A kombinatív képesség fejlesztésére kialakított program célja	51
2. A feladatgyűjtemény bemutatása	55
3. A fejlesztési programban résztvevők bemutatása	86
IV. A KOMBINATÍV KÉPESSÉG EMPIRIKUS VIZSGÁLATA	88
1. A vizsgálat célja	88
2. A vizsgálati minta	88
3. A vizsgálati eszköz	90
3.1. A feladatok rendszere	90
3.2. A feladatlapok és megoldásuk	92
3.3. A megoldások feldolgozása	101
4. A mérés eredményei	101
4.1. Alapvető statisztikai jellemzők	101
4.2. A mérési eredmények elemzése	105
ÖSSZEGEZÉS	124
IRODALOM	

B E V E Z E T É S

Az oktatás-nevelés célja - a megnövekedett társadalmi, gazdasági igények miatt - a személyiség sokoldalú és harmonikus fejlesztése. Ez az ismereteknek és a hozzájuk kapcsolódó képességeknek olyan dialektikus kölcsönhatását igényli, amelyben az ismeretek a képességek kibontakoztatására, a képességek további ismeretek megszerzésére adnak lehetőséget. Amilyen színvonalon kialakulnak a képességek, olyan mértékben határozzák meg az ember tevékenységét, és biztosítanak lehetőséget az egyre magasabb teljesítmény kifejtésére.

Ezzel magyarázható, hogy a közoktatást irányító párt és állami dokumentumokban fontos, mondható központi helyet foglal el a képességek kibontakoztatásának, fejlesztésének feladata. Ez nyilvánul meg a korábbi ismeretközpontú /anyag és követelmény/ tanterv képességközpontúvá /anyag és követelmény tekintetében/ való átépítésében. /Bakonyi 1973./

A tanulmányi és nevelési eredményeket növelő képességfejlesztést felgyorsította az új dokumentumok 1978-tól történő fokozatos bevezetése.

"A képességek fejlesztését a közoktatás irányítói, a pedagógiai elmélet és gyakorlat képviselői meggyorsítják vagy lelassíthatják. Mindez attól függ, hogy az egyes iskolafajtákra és osztályokra érvényes tantervvel párhuzamosan milyen mértékben sikerül a képességek egymásraépülését

a gyakorlatban érvényesíteni." /Lénárd 1979b.14. old./

A társadalmi elvárások miatt a pedagógiai gyakorlat és elmélet egyik leglényegesebb kérdése tehát a képességfejlesztés. A tervszerű képességfejlesztéshez szükséges a képességfejlődés folyamatának ismerete, a fejlesztés lehetőségeinek megállapítása.

A JATE Pedagógiai Tanszékén Dr. Nagy József vezetésével az országos távlati kutatási terv 6. főiránya keretében "A művelési képességek rendszere és fejlődése" című átfogó kutatás 1984-ben zárult le. Ez alapkutatás jellegű munka, melynek közvetlen célja a képesség-struktúra és a fejlesztési lehetőségek feltárása volt. A kutatási téma jellegéből következik, hogy a kutatás távlati célja az oktatás segítése. A munka során további vizsgálódási lehetőséget adó részproblémák kerültek a felszínre.

Egy ilyen részprobléma, a talált rendszer és az első eredmények alapján, az új tantervek hatásának, valamint az adott tantervi keretek között a művelési képességek fejlesztési lehetőségeinek vizsgálata.

A felhasználandó képességkonceptió értelmében az általános képességek fejlesztéséhez az ún. komplex művelési képességek is hozzájárulnak. Egyik ilyen művelési képesség a kombinatív képesség.

A nevelési fő feladatok két oldalról, az objektívált kulturtartalmak és befogadó szubjektív oldaláról való meg-

közelítése /Ágoston 1976/ lehetővé teszi, hogy mind az objektivált tudás, mind az ember alapvető képességeinek ki-
fejlődése, kifejlesztése megvalósuljon.

"Ez azonban csak akkor lehetséges, ha a kétféle követelmény szintézise már magában a tananyagban megvalósul, vagyis a matematikai ismeretek esetében, az ismeretek közvetítése, megtanítása úgy történik, hogy az egyben az ember alapvető képességeit is kifejlessze." /Csapó 1979. 103. old./

Azt kell megvizsgálni, hogy a matematikát általában hogyan lehet úgy tanítani, hogy minden fejezetének feldolgozása közben kiemeljük a kombinatorikus műveleteket, ezzel is biztosítva a képességfejlesztést.

Munkánkban arra a kérdésre próbálunk választ adni, hogy milyen tananyaggal és hogyan lehet a matematikát úgy tanítani, hogy az egyben a kombinatorikus képesség optimális fejlődését is szolgálja. Hangsúlyozva, hogy a matematikán kívül a többi tantárgynak is szerep lehet a kombinatorikus képesség fejlesztésében.

A problémák vizsgálata, megválaszolása céljából 1983 szeptemberétől egyéves időtartamu fejlesztési kísérletet végeztünk Tolna megye 6 általános iskolájának egy-egy negyedik osztályában, mely iskolákat és osztályokat a reprezentativitás feltételei szerint választottuk ki.

A kísérletben résztvevők az érvényben levő tanterv tananyagához és követelményeihez igazított fejlesztő feladat-

gyűjteménnyel dolgozták fel a matematikát. A feladatgyűjtemény a tanulói létszámnak megfelelő példányszámban készült, munkalap szerűen használhatták a tanulók. Formai szempontból úgy helyeztük el a feladatokat, hogy helyet biztosítottunk a megoldások számára. Egy-egy tananyagrészhez, típushoz több feladatot is készítettünk, amelyek csak megfogalmazásban, tartalomban, nehézségi fokban különböztek, de matematikai szempontból azonosak. Az órai feldolgozáshoz a feladat kiválasztását a pedagógusra bíztuk. Ezáltal lehetőséget biztosítottunk az osztályok és a tanulók közötti különbségek figyelembevételére. A tanórán kívüli felhasználást /gyakorlás, szorgalmi feladat/ is megengedtük.

Az évvégén összegyűjtött valamennyi feladatgyűjtemény, amely a tanulói próbálkozásokat, megoldásokat is tartalmazza, további, későbbi vizsgálat alapja lehet.

A kísérlet eredményeinek értékeléséhez szükséges az indulási szint ismerete. Ehhez meg kellett vizsgálni, hogy az alsó tagozat végére, az új matematika tanterv szerint már kombinatorika témakört feldolgozó matematikatanítással, milyen fejlettségi szintet érnek el a tanulók a kombinatív képesség területén.

1983 júniusában reprezentatív mérést végeztünk a már említett iskolák egy-egy negyedik osztályában /I. sz. mérés/. Ezek a tanulók valamennyien az új tanterv alapján ta-

nulták a matematikát, hiszen az új dokumentumok általános bevezetése 1978 szeptemberétől történt, ők pedig 1979 szeptemberében kezdték alsótagozatos tanulmányaikat.

1984 júniusában a fejlesztésben résztvevő negyedik osztályokban /II. sz. mérés/ és a megfelelő nyolcadik osztályokban /III. sz. mérés/ is elvégeztük a mérést. Mind a két időpontban a JATE Pedagógiai Tanszéke által kidolgozott, és a képességvizsgálat során felhasznált mérőeszközök közül kiválasztottakkal történt a mérés. Az értékelést számítógéppel végeztük.

A tanszék korábbi - IV. osztályos és VIII. osztályos Csongrád megyei tanulókkal végzett - vizsgálatának és a mostani - IV. és VIII. osztályos Tolna megyei tanulókkal végzett - I., II. és III. számú vizsgálatnak az eredményeit felhasználva összehasonlító elemzést végeztünk.

- a spontán,
- az új matematika tanterv által biztosított,
- a fejlesztési program alapján történt kombinatorika tanítással biztosított fejlődést vizsgáló mérés jellemző adatai között.

Ugy gondoljuk, hogy az új matematika tanterv módszertani alapelvei, koncentrikusan bővülő tananyag elrendezése, a fogalomalkotás szakaszait figyelembevevő tananyag feldolgozása olyan alapot biztosít, amely lehetővé teszi, hogy alsó tagozat utolsó évében a jelenlegi dokumentumok feladata-

anyagához viszonyítva mennyiségi és minőségi szempontból változatosabbakat is megoldjanak a tanulók.

Ezeket a feladatokat úgy kellett megfogalmazni, hogy megoldásuk a kombinatív képesség működését igénylő tevékenységet jelentsen.

Várható, hogy e tudatos ráhatással a kombinatív képesség területén fejlesztő hatás érhető el.

A vizsgálat és az elemzés által lehetőség adódik a ténymegállapításokon túl bizonyos javaslatok megtételére.

I. A VIZSGÁLAT ELMÉLETI HÁTTERE

1. A képesség fogalmának értelmezése

1.1. A képességekre és fejlesztésükre vonatkozó néhány fel- fogás

A személyiségfejlődés szempontjából egyik legfontosabb tényező a képességek fejlesztése. A fejleszthetőségre vonatkozóan különböző nézetek alakultak ki.

A proformizmus elmélete az öröklést tartja a fejlődés forrásának, mozgatóerejének. Szerintük a különböző képességek, a gondolkodás az öröklés által determinált. A fejlődést belsőleg determinált, eleve adott önfejlődésnek tekintti, amelyet a külső hatások nem befolyásolnak.

A szociológiai elmélet a környezetben jelöli meg a fejlődés egyedüli forrását és kizárja mind az öröklés, mind a nevelés szerepét.

A konvergencia elmélete, a személyiség alakulását az öröklés és a környezet mint két fejlődési tényező konvergenciája eredményeként tekinti. De alapvetőnek az öröklést tartja, a környezet maga semmi újat nem ad, csupán ilyen vagy olyan mértékben realizálja a fejlődés spontán menetét, hogy a gyermek "azzá váljék, ami".

A fejlődés forrásához közelebb vivő kísérletek, vizsgálatok igazolták, hogy mind az öröklésnek, mind a szervezett /nevelés/ vagy spontán környezeti hatásoknak meghatározott szerepe van a képességek és a személyiség fejlődésében. Ezen tényezők szerepét differenciáltan, körülhatároltan kell vizsgálni, ahhoz, hogy megtudjuk miben és mennyiben járulnak hozzá a fejlődéshez.

Mindenekelőtt a képesség értelmezésének sokféleségére kell utalni, mert ez nehezíti a képesség kialakulásának, fejlődésének, fejlesztési lehetőségeinek megismerését, így a képességfejlesztés feladatának megvalósítását.

A Pedagógiai Lexikon szerint "képesség: valamely cselekvésre, teljesítményre való alkalmasság, illetve ennek mértéke; tehetség. Minőségét, fokát részben az emberrel vele született adottságok, hajlamok, részben a környezeti hatások együttesének befolyására szerzett tapasztalatok /ismeretek, készségek/ határozzák meg. Az emberrel vele született adottságokból, hajlamokból álló rátermettség tehát a képesség fejlesztésének természetes feltétele, maga a képesség az emberi tevékenység folyamán alakul ki. Vannak általánosnak mondott képességek /pl. intelligencia, kreativitás/, melyek a tevékenységformák széles körében jutnak kifejezésre, és vannak többé-kevésbé különleges képességek /pl. kézügyesség, zenei képesség, élnék, képszerű fantázia, képességek egyes sportágakban eredmények elérésére stb./. Valamilyen irányu képessége mindenkinek van,

ennek feltárása azonban nem egyszerű, mivel mint belső lehetőség rejtett, és csak valamilyen teljesítmény után nyilvánul meg. A teljesítményt viszont sok egyéb tényező /szorgalom, érdeklődés, állhatatosság, fáradékonyság, a szorongás mértéke stb./ befolyásolja. Az átöröklés és a környezeti hatások viszonyának vizsgálata interdiszciplináris kutatások tárgya. Az eddigi tapasztalatok és vizsgálati eredmények egyértelműen bizonyítják, hogy az iskolázás mind a tudás /tények, összefüggések, támpontok, megoldási módok stb./ közvetítése, mind a különböző értelmi tevékenységek /emlékezet, képzelet, ítéletalkotás, következtetések stb./ útján hozzájárul az ember meglévő képességeinek kifejlesztéséhez, és olyan adottságokat is mozgásba hoz, képességekké fejleszt, melyek nélküle nem nyilvánulnának meg." /Pedagógiai Lexikon II. kötet, 1977. 344. o./

Kiemelhető a meghatározásból három fontos jellemző:

a képesség valamely cselekvésre, teljesítményre való alkalmasság;

az emberi tevékenység folyamán alakul ki;

csak valamilyen tevékenység után nyilvánul meg.

E határozott állásfoglalás mellett megtalálhatók a megfogalmazásban azok a bizonytalanságok is amelyek vitaterületei a különböző képesség^{fel}fogásoknak: adottság - képesség, képesség - tehetség, speciális - általános képességek viszonya.

A képesség témában folytatott irodalomkutatás alapján úgy tűnik, hogy a magyar pedagógia elméleti és gyakorlati szakemberei viszonylag későn kezdtek a képesség és a képességfejlesztés kérdése iránt érdeklődni.

A 60-as évek előtt alig találunk erre a témára vonatkozó publikációt.

A Pedagógiai Szemle 1961. évi 2. számában "Értelmezzük helyesen a képességeket és tehetségeket" c. szerkesztői cikk, amely az akkori központi állásfoglalásnak is tekinthető, összekapcsolja a képességet és a tehetséget. E kettő viszonyára vonatkozóan különböző nézetekkel találkozhatunk. Sokan szinte egyenlőségjelet téve közéjük tárgyalják, holott a kettő között minőségi, fokozatbeli jelentős különbség van. Az 1980, 1981, 1982-es évek szakirodalmát is vizsgálva a képességfejlesztés és a tehetséggondozás szinte mindig együtt jelentkezik.

A téma iránti érdeklődés fokozódását az is mutatja, hogy a 60-as években megjelennek magyarra lefordítottan ilyen témájú, jellegű külföldi szerzők művei /pl. Tyeplov, B.M. 1960. Hevetius, C./laude/ A /drén d'/ 1962. Kuzmina, N. V. 1963. Michel, Paul 1964./.

Az első elmélyültebb tanulmányok 1966-67-ben jelennek meg. Ezekben az években jelennek meg Lénárd Ferenc - aki a mai napig következetesen foglalkozik ezzel a témával - első olyan publikációi, amelyek a képességfejlesztést tárgyalják.

A 70-es években a képesség kérdésével foglalkozó cikke, tanulmányok száma tovább nő.

Ezekben az években kezdenek a szerzők az alkotóképesség /kreativitás/ és a problémamegoldó képesség fejlesztéséről is publikálni. /Pl. Jóboru 1971, Kornidesz 1971, Kelemen 1973, Landau 1974./

A készülő tantervek kapcsán is több cikk, ismertetés témája a képesség és fejlesztése /pl. Bakonyi Pál 1973./.

Az 1980-81-es években hatalmas lendületet kap a téma kutatása, ennek nyomát mutatja a megjelenő publikációk nagy száma. Egyik okként tekinthető, hogy a Művelődési Minisztérium az 1980/81-es tanév nevelési értekezletének témájául "A képességfejlesztés és tehetséggondozás"-t tűzte ki. Ugyancsak az volt a témája a 18. Szegedi Pedagógiai Nyári Egyetemnek is.

1982-ben a megjelent publikációk száma alapján bizonyos foku érdeklődéscsökkenés figyelhető meg. Érdekességként megjegyzendő, hogy az áttekintett időszakban zömmel 1-1 publikációt találunk szerzőnként, bár előfordul a 2-4 publikáció szám is. Lénárd F. kivétel, akinek igen számos tanulmánya jelent meg, köztük 2 monográfia is a témában.

A köznevelés fejlesztését szolgáló kutatások között jelentős szerep jut a képesség és fejlesztése témának.

Kelemen László témavezetésével folyó "A gondolkodás fejlesztése" c. kutatás egyik részeként a kreativitás és a gondolkodás logikai fogalma közötti összefüggéseket, valamint a 14-18 éves tanulók matematikai gondolkodásának fejlettségét és fejlesztésének lehetőségeit tanulmányozzák. A gondolkodás fejlődésének és fejlesztésének együttes vizsgálatával megállapítható, hogy milyen optimális szinten és fejlesztő hatással oktatható az egyes tantárgyak tantervi anyaga.

Salamon Jenő vezette "Képességek fejlődése és fejlesztése" c. kutatás a kommunikációs képességek, a gondolkodás és kreativitás, a tanulási képesség, a zenei képességek fejlesztési lehetőségeit vizsgálja. Különböző vizsgálati mérőeljárásokat, és módszertani kísérleteket dolgoztak ki a kutatók. Eredményként adatok várhatók a gondolkodás és az elemi kreativitás életkori fejlődéséről és fejlesztési lehetőségeiről. A tanulói képességek prognosztizálásához használható eljárást is kidolgoznak.

Zsolnai József vezetésével 1981-ben az Oktatáskutató Intézetben folyó kutatás célja, hogy feltárja az általános iskolában fejleszthető képességek teljes körét és rendszerét, továbbá tisztázza a képesség- és tehetségfejlesztésben az iskola lehetséges szerepét.

A kutatás előzménye az 1972-ben indult nyelvi-irodalmi-kommunikációs kísérlet, amely szervesen épül be a jelenlegi kutatásba. A kísérlet során a kutatók definiáltak közel 120 nyelvi-

kommunikációs és szociális képességet. Az egyes képességek taníthatóságát és fejleszthetőségét illetve ezek mértékeit tisztázva, a kidolgozott egységes tananyagrendszerrel és taneszközrendszerrel történik a számbavett nyelvi-kommunikációs és szociális képességek tanítása és fejlesztése.

A publikációk, előadások alapján körvonalazható egyes kutatók véleménye, nézete a képesség és fejlesztése témakörben.

Lénárd Rerenc "Tételek a képességfejlesztésről és a tehetséggondozásról" címmel az 1981-es Szegedi Pedagógiai Nyári Egyetem elhangzott előadásában elvi és gyakorlati kérdéseket boncolgat:

Az ismeretek és képességek kapcsolatára vonatkozóan megállapítja, hogy a képességeket csak ismeretek meglétére építve alakíthatjuk ki, de az ismeretek elsajátítása nem elegendő önmagában a képességek kibontakoztatásához. A képességek nem az emberrel veleszületett tulajdonságok.

Az egyes tevékenységeknek megfelelő gyakorlása alakítja ki a tanulóknál a tevékenységeknek megfelelő képességeket.

A tehetséggondozás a valamennyi tanuló képességfejlesztésével biztosítható.

A képességek kialakításánál figyelembe kell venni sajátosságos hierarchiájukat.

A képességek fejleszthetősége és az egymással szoros kapcsolatú hierarchikus felépítettségük figyelembe vétele, a pedagógiai gyakorlat számára elengedhetetlen elvek. A kifejlesztésre váró u.n. alapképességek: a kommunikációs /a beszéd, az olvasás, az írás/, a kognitív /a megismeréssel kapcsolatos/, és a cselekvés képességei.

Eredményes fejlesztőmunka feltétele a megismerést és a cselekvést megalapozó képességek kibontakoztatása közötti helyes arány megtartása.

A megértés előfeltétele a gondolkodásnak, ez utóbbi képesség megfelelő feladatokkal, módszerekkel fejleszthető.

A tanulók képességének kifejlődését segíti a kellő motiváció, az intenzív tanítási-tanulási eljárások, a valamilyen szinten meglévő képesség felismerése, a tanulói önellenőrzés, önértékelés igénylése és biztosítása.

Elveit és felfogását a probléma megoldó gondolkodásról jól tükrözi az általa kidolgozott variációs tanítási módszer. Ennek lényegét később vázoljuk.

Salamon Jenő "Az értelmi képességek fejlődése és fejleszthetősége" c. az előbbiek során említett rendezvényen elhangzott előadásában a gondolkodás és a többi megismerési folyamat kapcsolata által jellemzi az egész értelmi fejlődés fozatait. Piaget kutatásait alapulvéve, de azt alkotó módon tovább fejlesztve, a többszemponu megközelítés és a kísérletezett fejlesztési variációk eredményeként több általános elvet fogalmazott meg az értelmi képességek fejlesztéséhez:

"A cselekvés, mint aktivizálás differenciált értelmezése és rugalmas alkalmazása az értelmi képességek alakításában."

"A cselekvés nemcsak alapja az értelmi tevékenységnek, hanem célja és eredménye is."

"A tanulás megfelelő motivációs bázisának biztosítása."
/Szegedi Pedagógiai Nyári Egyetem 1981. 136-138. old./

Másik munkájában a divergens jellegű problémamegoldást tanulmányozza a divergens mutatók életkori alkalmazásának vizsgálatában. Átfogó képet nyújt a gyakorlati problémamegoldás fejlődéséről az általános iskolai időszakban.

Vizsgálja a különböző tanítási kísérletek /Kodály-féle ének-zene Lénárd, Varga/ transzfer hatását a problémamegoldó gondolkodás fejlődésében. /Salamon 1973./

Kelemen László: "A képességfejlesztés pszichológiai alapjai, különös tekintettel a megismerő képességek fejlesztésére" c. előadása a képesség és képességfejlesztés pedagógiai részfeladatának a személyiségnevelés egészébe történő illesztéséhez rendszerezte a személyiség szerkezeti összetevőit. Ennek alapján a képességek a megismerő /értelmi/ és a motoros struktúrákhoz tartozók.

A jártasság, készség, képesség viszonya kérdésében leginkább Nagy József felfogásával ért egyet, így a készséget elemibb, automatizált cselekvésnek vagy tevékenység-komponensnek tekinti, míg a jártasságot a bonyolultabb feladat-

megoldásokban megjelenő gyakorlottságnak, amelyik nem automatizált, amelyben a tudatos irányításnak mindig megfelelő szerepe van.

"Nem nehéz belátni, hogy a készség és a jártasság beépülnek a képességfejlődésbe."/Ped.Nyári Egyetem 1981. 145-169.o.

A képességek alkotta hierarchikus rendszert nem tekintik merevnek, átalakíthatatlannak az iskolai oktatás hatása szempontjából, ugyanakkor fontos szerepet tulajdonít a személyiség strukturájának és belső hierarchikus rendszerének.

A képességfejlesztés feladatait, elveit, módszereit megfogalmazza az észleléssel kapcsolatos, az emlékezeti, a képzeleti, a gondolkodás képességeire illetve az u.n. komplex intellektuális, a tanulási és az alkotó /kreatív/ képességre vonatkozóan.

1.2. A vizsgálatához felhasznált képesség koncepció

A képességek értelmázésénél jó szolgálatot tesz a marxista pszichológiának az a törvénye, amely szerint a képességek az emberben a nekik megfelelő tevékenységek célszerű gyakorlásával alakulnak ki. A kialakult képességek további tevékenységeken keresztül éreztetik hatásukat. A képességek és a tevékenységek elválaszthatatlanok egymástól. /Lénárd 1979/a/

A bevezetőben említett kutatáshoz olyan képességkonceptióra volt szükség, amely nem általános, amely közvetlenül felhasználható. Ehhez a legáltalánosabb elvi alapokat Rubinstein és Leontyev munkáinak tanulmányozása során találhatjuk meg.

Leontyev a képességeket a törzsfejlődés eredményeként, az emberi tevékenység kialakulásának, fejlődésének pszichikumbeli lenyomataként mutatja be. /Leontyev 1964./

Rubinstein a képességeket átfogóan vizsgálja. Elemzi az általános és speciális képességek viszonyát, állást foglal a képesség-adottság kapcsolatáról: "Az adottságok és a képességek között igen nagy a distancia. Ott van közöttük a személyiség fejlődésének egész útja." /Rubinstein 1964. 989.o./

A felhasználandó képességkonceptió kialakításához jól használható, kiindulópontként kezelhető volt a kutatók számára Rubinsteinnek az a felfogása, amely szerint a képességek pszichikus képződmények, a pszichikus folyamatoknak, az agy tevékenységének a produktumai.

"Képességen a szó tulajdonképpeni értelmében mint mondtuk, bonyolult képződményt, olyan pszichikus tulajdonságok komplexumát értjük, amelyek alkalmassá teszik az embert meghatározott fajtájú, történelmileg kialakult, társadalmilag hasznos szakmai tevékenységre. Minden sajátos képesség valamire való képesség" /Rubinstein 1967. 283. o./.

Az értelmi képességekre koncentrálva, jól használható koncepciót szolgáltat Piaget azáltal, hogy az értelmi fejlődés egyes szakaszait, fokozatait bizonyos pszichikus struktúrák kialakulásával, megjelenésével jellemzi. /Piaget J. 1970./

Ehhez kapcsolódva a képességek pszichikus rendszereknek tekinthetők. Eljutottunk Nagy József által megfogalmazott rendszerszemléletű megfogalmazáshoz. A rendszerszemléletű képességfelfogás adja azt a többletet, eszközt, amely révén a képességek tanulmányozása, vizsgálata, elemzése, fejlesztése megtörténhet.

"Egy rendszerszemléletű személyiségmodell a személyiség pszichikus szabályzási rendszereit két komplex pszichikus rendszer a jellem és a tudás részeként írja le." ..., a tudás pedig a megvalósítást lehetővé tevő, a végrehajtásért felelős pszichikus rendszereket /fogalmak, jártasságok, készségek, képességek stb./ foglalja magában. /Nagy 1979. 128. o./." /Csapó 1979. 19. o./

A kutatás alapját képező elméleti koncepció szerint a képesség tanult, tanítható tulajdonság, meghatározott struktúrával rendelkező, működő pszichikus szabályzási rendszer. Ez abból a felfogásból következik, mely szerint a tevékenységben megnyilvánuló képesség, mint tanult tulajdonság is öröklött és /korábban/ tanult tulajdonságok működésének eredménye.

Az adottságok és a képesség viszonyát is tisztázza ez a felfogás azáltal, hogy a képességet nem az adottságokból kialakulónak, hanem teljes egészében tanult strukturának tekintti.

Mivel a képesség tanult tulajdonság és tevékenységben nyilvánul meg, értelmezéséhez a tevékenység legfontosabb dimenziói /tárgya, strukturája, környezete/ alapján lehet eljutni. Ezeket figyelembevéve, a külső tárgyi környezettől független tanult tulajdonságokat összehasonlítva azt mondhatjuk, hogy a készségektől és a jártasságoktól az is megkülönbözteti a képességeket, hogy a jártasságok és a készségek csak tárgyak valamely csoportján működőképesek, a képességek tárgya kötetlen, tehát bármely szóba jöhető tárgyon működik.

A különbség a struktúra szempontjából is megfogalmazható. A képességek lehetnek kötött és kötetlen strukturájúak. /Erről később részletesebben szólunk./ A jártasság problémamegoldó jellegű, kötetlen strukturájú, a készség algoritmussal, szabállyal leírható, szerkezete kötött. A valódi jártasságból, függetlenül a gyakorlás mértékétől, soha nem lehet készség. /Nagy 1983./

A tanult tulajdonságok típusainak viszonyáról található ettől eltérő nézet is. Ezekről már korábban is tettünk említést. Például jól illusztrálja a felfogásbeli különbséget Lénárd véleménye:

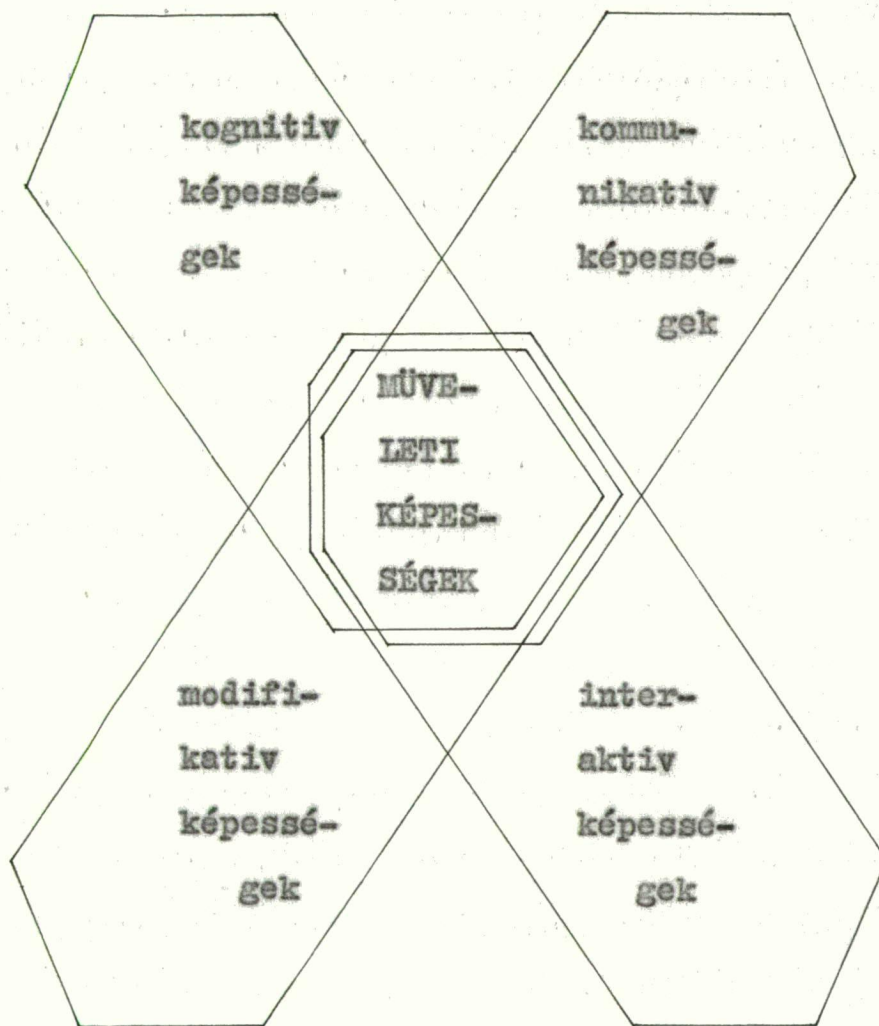
"A tevékenység gyakorlása az emberben, az emberi személyiségben nyomot hagy és ez kap különböző elnevezést a képesség, a készség és a jártasság fogalmaiban. Ha elfogadjuk a marxista pszichológiának azt a törvényét, hogy a tevékenység gyakorlása alakítja ki a képességeket, akkor kézzelfogható, hogy a készségek és a jártasságok csak fokozatban, és nem minőségben különböznek a képességektől. Megállapodás kérdése, hogy az alacsonyabb fokozatu képességet készségnek, a magasabb fokozatát pedig jártasságnak nevezzük el." /Lénárd 1979/b. 47. old./

"Ha a személyiségek a maga teljességében, mint bonyolult kommunikativ rendszert tekintjük, és azt vesszük számba, hogy melyek létének, működésének, viselkedésének feltételeit képező tanult rendszerei, amelyek által szükségleteit kielégítheti, céljait megvalósíthatja, akkor négyféle általános képességrendszert kapunk." /Nagy 1983. 88. old./

Ezek a kommunikativ képesség, az alkotóképesség, önfejlesztőképesség az irányító képesség. Az általános képességek kötetlen strukturával rendelkeznek. Ezek részeik, alkotó elemeik, kapcsolataik révén átszövik egymást.

Az általános képességek közös részét egy kötött strukturájú rendszer képezi, ennek összetevőit nevezzük műveleti képességeknek. "Műveleti képességeknek nevezzük az olyan ta-

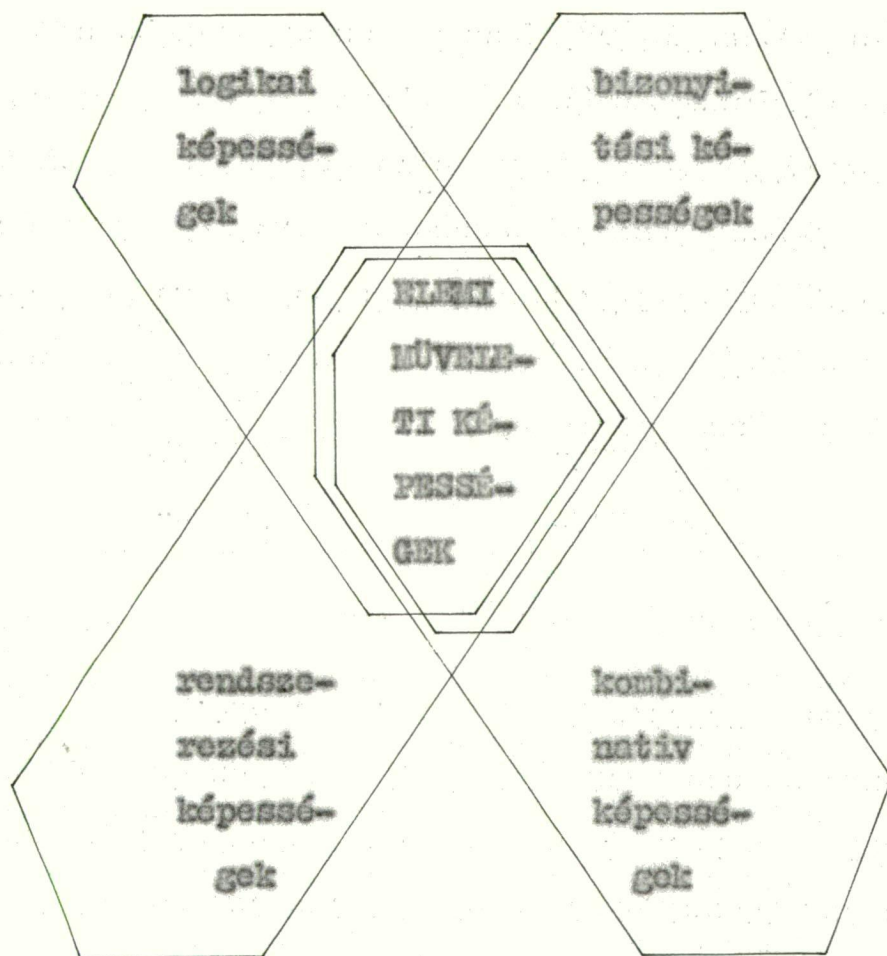
nult tulajdonságokat, amelyek strukturája kötött /algoritmus-
sal megadható és ugyanakkor gyakorlatilag gazdaságos az algo-
ritmus szerinti működése/ tárgyhoz és környezethez viszont nem
kötött." /Nagy 1983. 88. old./



1. ábra

/Nagy 1983. 90. old./

Az eddigi vizsgálatok alapján úgy látható, hogy "a műveleti képességeknek négy nagy relatív önálló, de egymással sokszálal összefüggő rendszere van". /Nagy 1983. 91. old./ Ezek a bizonyítási képességek, a kombinatív képességek, a logikai képességek és a rendszerezési képességek. Alapjuk az egyváltozós /elemi/ műveletek képességek rendszere.



2. ábra

/Nagy 1983. 90. old./

A művelési képességek teljes rendszerének feltárásához több dimenziós megközelítés vált célszerűvé. A háromdimenzió szerinti /tárgy, struktúra, környezet/ négy-négy szint még további finomításokat tesz lehetővé.

A vizsgálati szempontok sokoldalúsága lehetővé teszi az egyes kiragadott művelési képességek megismerése helyett a művelési képességek egymással összefüggő, teljes rendszerének megismerését.

A kutatók által az előbbieket szerint kialakított képesség koncepció jó elméleti alapot biztosít a képességek vizsgálatához.

2. A k o m b i n a t í v k é p e s s é g

2.1. A kombinativitás problémái

A kombinativitás és az emberi gondolkodás kapcsolatáról a pedagógiai és a pszichológiai irodalomban található elméletek, nézetek nem tisztázzák eléggé a kombinativitás eredetét, kialakulásának folyamatát, strukturáját, csupán kiemelik szerepét az alkotó folyamatokban, a gondolkodás fejlődésében.

Az asszociációs pszichológia elmélete szerint az un. alkotó képzelet a korábban észlelt elemek olyan kombinációt képes létrehozni, amelyek a valóságban nem tapasztalhatók. A létrehozás módját nem tisztázva, szerepet ad az elmélet a véletlennek.

Rubinstein szerint a képzelet a valóság minden képződményét sokféleképpen átalakítja az átalakítások egyike a kombináció. "A kombinálás csak "mechanizmus", hatása rendszerint valami olyan tendenciának engedelmeskedik, amely meghatározza a kombinálandó mozzanatok összeválogatását és értelmet lehel azokba." /Rubinstein 1964. 519. old./

Az alkotás folyamatát a kombinativitással Leibnitz és Poincaré matematikusok kapcsolják össze.

Guilford és Lowenfeld kreativitás modelljében kombinatív mozzanatok találhatók. /Landau 1974./

A felfedezés szerepét vizsgálja és a heurisztikus módszert fogalmazza meg a megoldások variálásán keresztül Pólya György. /Pólya 1977./

Lénárd Ferenc és Salamon Jenő az értelmi fejlődést a problémamegoldó gondolkodás oldaláról vizsgálva jut el a kombinatív képesség működési területére, különösen a divergáló problémamegoldás utkeresési formájánál. /Lénárd 1978./, /Salamon 1973./

A kombinativitás problémáival foglalkozó kutatók közül Jean Piaget munkássága a legelőbbre mutató. Meghatározóak az értelmi fejlődésre vonatkozó vizsgálatai. Munkássága jelentős

néhány kombinatív művelet /kombinációk, permutációk, ismétléses variációk, különböző elemszámú kombinációk képzése/ kialakulási folyamatának kísérleti vizsgálata miatt is. Eszerint akkor alakulnak ki a teljes felsorolást lehetővé tevő műveleti sémák, amikor a konstrukcióknak egyetlen alapelv szerinti módszeres felsorolása figyelhető meg. /Piaget-Inhelder 1967./, /Piaget 1970./ A kombinatív képesség - a logikai műveletek és a véletlen fogalmával kapcsolatban vizsgált - kialakulási folyamata tanulmányozása során nem tisztázza a kombinatív műveletek egymáshoz való viszonyát, így a kombinatív képességet, mint rendszert nem vizsgálja.

A JATE Pedagógiai Tanszékén folyó, már említett kutatás kiterjed a kombinatív képesség felépítésére, kialakulásának folyamatára, kialakításának, fejlesztésének lehetőségeire is. A kombinatív műveleti képesség hipotetikus modelljét és strukturáját Csapó Benő dolgozta ki Piaget kísérleteit, nézeteit is alkotó módon felhasználva. /Csapó 1979./

2.2. A kombinatív képesség elméleti koncepciója

A koncepció kialakításához két oldalról - a pszichológia és a matematika oldaláról - történt a megközelítés.

A képességekről, a gondolkodásról általában a pszichológia nyújt segítséget.

Elfogadva Piaget felfogását, mely szerint műveleti képességeink a valóság strukturájának elsajátítása, belsővé válása révén alakulnak ki, és tudva, hogy a valóságban meglévő kombinatorikai strukturák leírását a kombinatorika adja meg, az alapvető kombinatív műveleteink milyenségére a kombinatorika alapjainak elemzésével következtethetünk.

A legtágabban értelmezett kombinatív képességet általános képességnek, sokféle készség, jártasság, műveleti képesség bonyolult rendszerének tekintjük. "Tágabb értelemben kombinatív képességen azt az állandósult, bonyolult pszichikus rendszert értjük, amelynek működése révén az ember változatos módon képes dolgok vagy események tetszőleges összességéből meghatározatlan szabályok szerint bizonyos számot kiválasztani és/ vagy létrehozni ezek egymástól különböző összeállításait, amelyek valamely körülírt feltételeket kielégítenek." /Csapó 1979. 53. old./ Az ilyen határozatlan feltételek mellett nem alakulhatnak ki az elemi műveletek egymáshoz kapcsolódása révén az állandósult szabályozási rendszerek. Az ilyen esetben működő kombinatív képesség vizsgálata - bonyolultság, leírhatatlanság, modellezhetetlenség miatt - szinte lehetetlen.

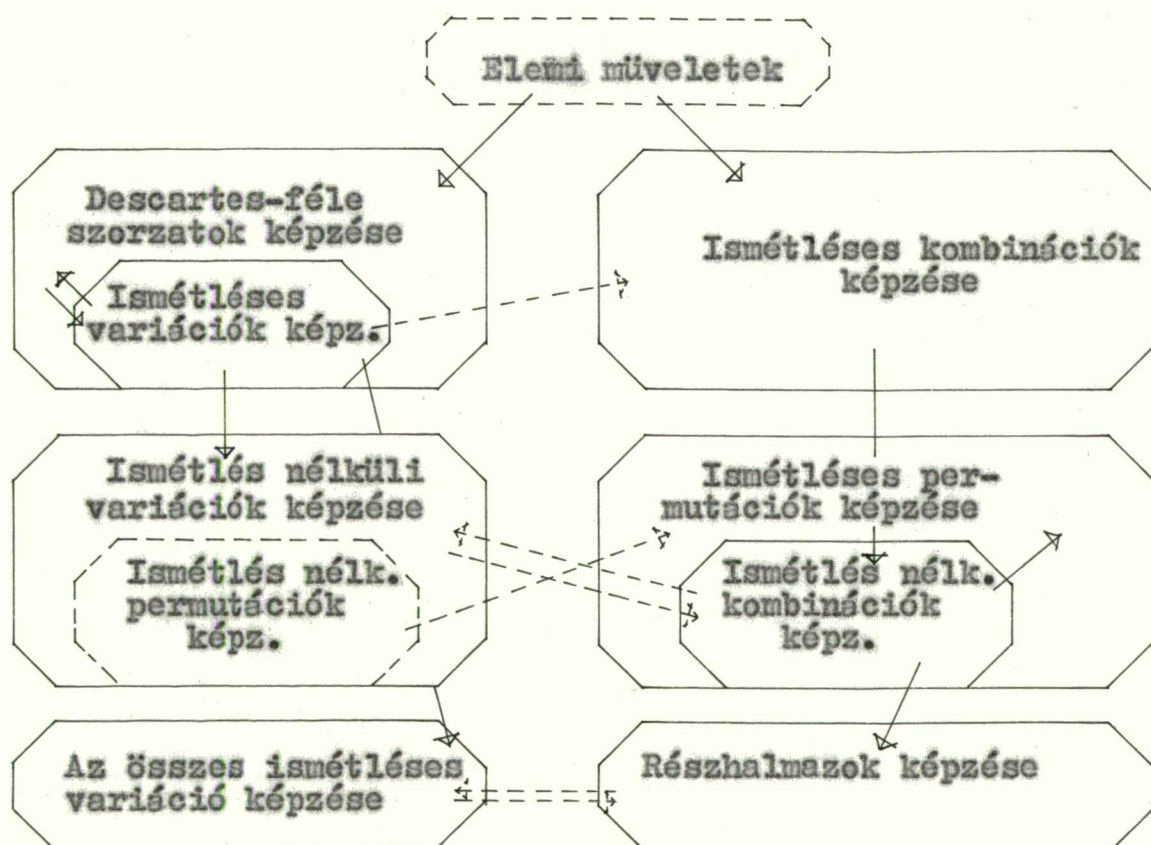
A kutatáshoz célszerű volt a kombinatív képességek azon kötött strukturáju részeit a feltételek konkretizálásával

megadni, amelyek jól leírhatók, így empirikusan vizsgálhatók. "Szűkebb értelemben vett kombinatív képességnek nevezzük azt az állandósult bonyolult pszichikus rendszert, amelynek működése révén az ember változatos módon képes dolgok vagy események megadott összességéből, meghatározott szabályok szerint bizonyos számot kiválasztani, és/ vagy létrehozni ezek egymástól különböző összeállításait, amelyek megadott feltételeket kielégítenek." /Csapó 1979. 55. old./ Az ilyen feltételek között működő képesség által az összes eset létrehozására, végiggondolására lehetőség van.

"Egy-egy feltételrendszernek megfelelő felsorolás, gyakran végrehajtva, tevékenységünk elemi operációinak mindig azonos sorrendben lefutó láncolatává válik. Azelemi operációk láncolatával, belsővé válásával alakulnak ki a kombinatív műveletek. A kombinatív műveletek kialakulásával és rendszerbe szerveződésével pedig kialakul a szűkebben értelmezett, műveleti képességként leírható kombinatív képesség." /Csapó 1983/a/ 36. old./

A kombinatív műveletek rendszere tehát a kombinatív képesség, mint műveleti képesség, amelyet kötött struktúra és kötetlen tartalom jellemez. A művelet fogalmat természetesen nem matematikai, hanem pszichológiai értelemben használjuk, így a megfelelő tevékenységet /adott elemek, adott feltételeket kielégítő összeállításainak felsorolása/ szabályozó pszichikus rendszert értünk alatta.

A matematikai és a pszichológiai szempontokat figyelembe véve a vizsgálat elméleti irányítói feltételezték, hogy a kombinatorik műveletek rendszere vagyis a kombinatorik műveleti képesség az elemi műveletekből két irányba haladva épül ki. A két ág a "variálás" műveleteit illetve a "kombinálás" műveleteit tartalmazza. Ezek a műveletek a legegyszerűbbtől haladva a következők:



————> valószínű fejlődési sorrend

-----> egyéb feltételezhető kapcsolat

A kombinatív képesség fejlődésének négy szintje különböztethető meg. Ezek a szintek - amelyek nem kizárólag az életkor függvényei /szemben Piaget felfogásával/ - a következők:

Művelet előtti szintre jellemző a rendszertelen próbálkozás, keresgélés. A konstrukciók megalkotása során sok az ismétlődés, képzési szabályok nem ismerhetők fel. A végleges jó előállításokat az összehasonlítások /minta, szabály/ alapján választják ki.

Konkrét műveletek szintjén a rendszeresség első jelei figyelhetők meg. Konkrét dolgokhoz kötve, a konstrukciók manipulatív előállításával és az utólagos rendszerezésükkel már megtörténhet az összes különböző konstrukció előállítása. Az egyes újabb konstrukciókat a minta és szabály értelmezésével, a már meglévők elemzésével készíthetik el, amelyek történhetnek az elemek felcseréléseivel, bizonyos szimmetriák és egyéb transzformációk felhasználásával, átfogóbb elvek alapján.

Formális műveletek szintjén felismerik a hasonló feladatszerkezeteket és a korábbi tapasztalatokat alkalmazzák. Próbálgatás helyett, közvetlenül módszeresen felsorolják az összes lehetőséget.

A kombinatív műveleti képességek korábbi szinteken megjelenő megnyilvánulásai /összehasonlítások, felcserélések, szimmetriák, transzformációk/ ezen a szinten - minőségi fejlődés után - egybeépülnek.

Az összes lehetséges konstrukciót rendszerezési sémák állítják elő, vagyis kialakulnak az egyes rendszerezési sémáknak megfelelő pszichikus szabályozási rendszerek, ezek a kombinatív műveletek.

Egy bizonyos bonyolultságon túl /elem, művelet/ szükség van bizonyos matematikai ismeretekre.

A tudatos műveletvégzés szintje ez, amely a korábbi három szinttel nem alkot szerves egységet, mert itt a matematikai formalizmus kezelésének a képességéről van szó. Ilyen értelemben a kombinatorikai ismeretek nem mindegyikét tekintjük a kombinatív képességhez tartozónak, csak azokat, amelyek a formális szinten már kialakult műveletekre vonatkoznak és a műveletvégzéssel szerves kapcsolatban vannak. Hiszen a kombinatorikai ismeretek megtanulása önmagában semmivel sem járul hozzá a kombinatív képesség fejlődéséhez. /Csapó 1979./

A műveleti képességek, így a kombinatív képesség vizsgálata szempontjából is fontos megkülönböztetni, hogy melyik a jellemző absztrakciós szint és milyen szintű a szabályozás. Erről részletesen a vizsgálat eszközeinél szólunk.

II. KOMBINATORIKA ÉS A KÉPESSÉGFEJLESZTÉS

1. A kombinatorika általános elemzése

"A kombinatorikai ismeretek elemzésével a kombinatív tevékenység fontosabb formáit és azok kapcsolatait gyűjthetjük össze, így a kombinatorika elemzése elsősorban a képesség tartalmi oldalának vizsgálatát segíti." /Csapó 1979. 5. old./

A kombinatorika véges halmazokkal foglalkozik. Ezek elemeinek adott feltételek figyelembevételével előállított csoportjaihoz kapcsolódik a vizsgálódási területe. A tankönyvek által hordozott alapismeretek a kombinatorikának csak egy szűk tárgykörét tartalmazzák. Vizsgálataink célja miatt, praktikus szempontból ezekhez igazodunk, alapismeretekként ezeket tekintjük. Legismertebb, leghasználatosabb kombinatorikai konstrukciók: a permutációk, variációk, kombinációk, amelyek egyaránt halmazok elemeiből képzett valamilyen összeállítások /ezek a kombinatív képességműködésének az eredménye/. Kombinatorikai műveletek: a kombinatorikai konstrukciók képzését szolgáló eljárások.

A kombinatorika alapelemeinek vizsgálata a kombinatorika, mint objektívált tudás rejtett szerkezetének feltárását jelenti. Ismeretes, hogy ugyanannak a rendszernek általában

egyidejűleg más-más szempont alapján elkészített, így több-féle strukturájáról beszélhetünk.

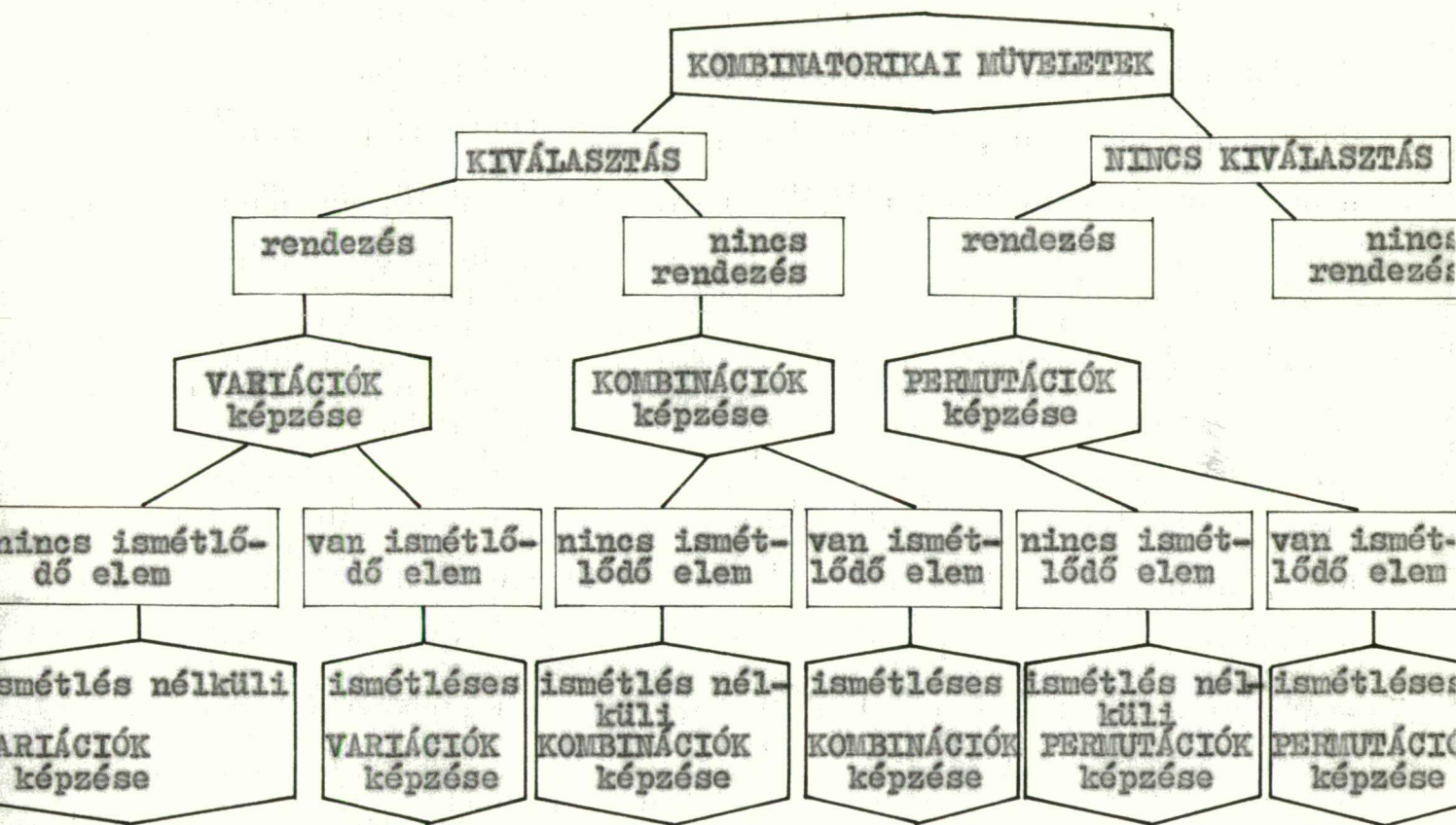
A lehetséges strukturák közül a kombinatív képességgel kapcsolatban különös jelentőséggel bíró, - az alapismeretek szűkebb körére értelmezve - kétféle struktúra típus kapcsolódik a vizsgálatunkhoz:

a/ Taxonómiai strukturák

b/ Logikai strukturák

a/ A taxonómiai strukturák feltárása a kombinatorika, mint rendszer elemeinek csupán a számbavételét jelenti, kiszakítva belső lényegi kapcsolatukból, formális csoportosításuk történik. A rendszer megismerésének ez a legkezdetlegesebb foka.

Taxonómiai strukturák közül egy: a kiválasztás, rendezés, ismétlődés alkalmazásával a kombinatorikai műveletek hagyományos csoportosítása:



4. ábra

/Csapó 1979. 23. old./

Látható, hogy ez a csoportosítás nem a lényegi kapcsolatokat fejezi ki. Az egy csoportba sorolt kombinatorikai műveletek között nincs logikai kapcsolat.

b/ A logikai strukturák a kombinatorikai műveletek belső szerkezetét, lényeges, funkcionális kapcsolatait tükrözik. Ezeket a logikai strukturákat a kombinatorikában leggyakrab-

ban előforduló problémákhoz kapcsolhatjuk. Ezek:

- adott feltételeket meghatározó konstrukciók számának meghatározása
- ilyen konstrukciók előállítás, felsorolása.

Annak megfelelően, hogy a konstrukciók számának meghatározásához milyen módszer alkalmazásával jutunk a kombinatorikai műveletek csoportjai:

I. csoport: /lehetőségek egyszeri szorzása/

- Descartes-féle szorzat képzése
- ismétlés nélküli permutációk képzése
- ismétlés nélküli variációk képzése
- ismétléses variációk képzése

II. csoport: /a lehetőségek szorzása - az egyes ekvivalencia osztályokban levő konstrukciók számának meghatározása - a lehetőségek osztása/

- ismétléses permutációk képzése
- ismétlés nélküli kombinációk képzése

III. csoport: /egyszeri vagy többszöri alkalmazása az előző két osztályhoz tartozó eljárásoknak/

- ismétléses kombináció képzése
- n elemű halmaz összes részhalmazainak képzése

A kombinatorikai műveletek megvizsgálhatók az egyes kombinatorikai konstrukciók képzése és felsorolása szerint is. Ez azért fontos kérdéskör, mert egy kombinatorikai művelettel képezhető összes konstrukció egyszerű felsorolása egyben azok rendszerezését is jelenti, így a kombinatív képesség szempontjából kiemelt jelentőségű.

E szempont szerinti bonyolultsági sorrendben az egyes csoportok:

I. csoport: /legegyszerűbb képzés, a rendszerezés fa alaku gráffal történhet/

- ismétléses variációk képzése
- ismétlés nélküli variációk képzése
- ismétlés nélküli permutációk képzése
- Descartes-féle szorzatnak megfelelő konstrukció képzése

II. csoport: /összetettebb képzés: fa alaku rendezés, majd a konstrukciók osztályozása/

- ismétléses permutáció
- ismétlés nélküli kombináció
- "gyöngyfűzés" típusu feladatok

III. csoport: /bonyolultabb képzés: - fa rendezés és az osztályozás többszöri alkalmazása

- háló strukturába rendezés /háló, mint két műveletes (egyesítés és metszés) algebrai struktura/

- n elemű halmaz részhalmazainak képzése
- kombinációk képzése
- adott halmaz összes osztályozásai

A logikai strukturák ezen csoportjait vizsgálva, összehasonlítva látható, hogy kifejezésre jut az az igény, hogy belső lényegi kapcsolatok tükröződjenek az alapelemek, alapismertetek között. /Csapó 1979./

2. A matematikatanítás korszerűsítése a képességfejlesztés szempontjából

2.1. Matematika-tanítási kísérletek:

A tartalmi és metodikai megújítást szolgáló tantervek időbeni és tartalmi előzményeként szolgáltak azok a matematikai kísérletek, amelyek 1963-tól a korszerűsítési törekvésekként indultak.

Közülük a tovább viendő és vihető alapgondolatok, tapasztalatok alapján a Lénárd-féle és a Varga Tamás-féle matematikatanítási kísérletről részletesebben szólunk, mert a képességfejlesztés lehetőségeinek vizsgálatával jelentősen hozzájárultak a hetvenes évek végi új matematika tanterv megalkotásához.

Lénárd Ferenc-féle matematika tanítási eljárás az 1964/65. tanév óta longitudinális pedagógiai-pszichológiai kísérlet formájában folyik.

Lényege: Variációk felhasználása a tanulók matematikai gondolkodási tevékenységének fejlesztése érdekében oly módon, hogy ezzel szinkronban fejlődik a tanulók személyisége.

Célja: a már ismert pszichológiai törvények, megállapítások beépítése az oktató-nevelő munkába, valamint továbbiak feltárása és megfogalmazása a tanítási-tanulási tevékenység hatásfokának emelése érdekében.

Fő feladata: a tanulói gondolkodásfejlesztés lehetőségeinek kidolgozása, ezzel az egyik általános képesség fejlesztését szolgálják.

Az eljárás középponti gondolata a "variációs szemlélet", az a magatartás, amely a problémák minden oldalról történő megfogalmazása, megoldása, indoklása közben a tanító és a tanuló részéről megnyilvánul. Tehát egy intenzív képességfejlesztési módszer kidolgozása a cél, amely valamennyi tantárgy és korosztály eredményesebb tanításához felhasználható. Egyik tantárgy, amelyre kidolgozták, a matematika. Rendszeresen felépített gyakorlással alakítják ki a tanulóknál a matematikai variációs képességet. A gyakorlás alapja a gondolkodásfejlesztéshez kidolgozott feladatrendszer, amelynek lényege, hogy az egyes feladatokat a meghatározott adatok összes lehetséges kapcsolatainak előállításával nyerik, felhasználva

a műveleti jeleket és a szövegalkotást. Ezeket hívják feladat-variációknak. Az egyes elemi variációtípusok azonos szerkezetűek.

A kísérleti tanításban alkalmazott variációk ún. modellszereppel rendelkeznek, amelyek az érthetőség érdekében egyszerűsítve mutatják be a valóság tárgyait, folyamatait a pedagógiai cél érdekében.

Az egyes témákhoz /pl. az elemi összeadás és kivonás összefüggésének elsajátítása a különböző számkörben; azonos nevezőjű törtek összeadása, kivonása; paraméteres egyenletek megoldása; szövegalkotás a különböző matematikai összefüggésekre stb./ variációcsoportokat készítettek, amelyek egyetlen alap-probléma elemeinek szabályszerű és mozgékony kapcsolataival tartalmazzák az összes lehetséges problémamegfogalmazásokat. A variációcsoportok által képviselt modellek megértésére, önálló megkonstruálására, sokoldalú értelmezésére készítették a tanulókat az alsótagozati matematikatanításban.

"A gondolkodási tevékenység eredményessége elsősorban attól függ, hogy képes-e a gondolkodó személy a problémát, a problémába rejlő adatokat, tényeket a lehető legtöbb oldalról megközelíteni, az adatokat, a megoldási lehetőségeket variálni." /Uj utak a matematika tanításában 1. 1976.

59. old./

A variációs tanítási módszerek - amely során az óra nagyobb részében, az ismertetett rendszerű feladatmegoldás fo-

lyik, minden tanuló számára azonos feladattal kifejleszthető az un. variációs képesség, fejleszthető a gondolkodás rugalmassága.

"A Lénárd által bevezetett variációs képesség fogalma valójában megegyezik az előzőekben meghatározott tágabb értelemben vett kombinatív képesség fogalmával és ezt a képességet Lénárd a gondolkodási képesség legfontosabb összetevőjének tekinti." /Csapó 1979. 95. old./

Mivel az alkalmazott variálás eltulzása bizonyos egyoldalúsághoz vezet, ezért van ugyan szerepe, de ez nem egyedi a gondolkodás rugalmasságának, illetve a kombinatív képesség fejlesztésében.

Varga Tamás irányításával 1963-tól folyó komplex matematikatanítási kísérlet figyelembe vette azokat az eredményeket, amelyeket a matematikában, a pedagógiában és a pszichológiában az utóbbi években értek.

Célja: - a matematika tanítás tartalmi és módszertani továbbfejlesztése
- tapasztalatgyűjtés /az eredményesebb gondolkodásfejlesztéshez illetve matematikatanításhoz/.

A kísérlet pszichológiai alapjául azok az elméletek szolgáltak, melyeknek értelmében a megismerő tevékenységet a cselekvéshez kell kapcsolni. Legfontosabb alapelve: "dolgokkal való műveletekből jutni el a jelekkel való műveletekhez.

... vissza-visszamegyünk a dolgokkal végzett manuális tevékenységhez, valahányszor a jelekkel végzett tevékenység értelmessé tétele ezt megkívánja." /Varga Tamás 1966, 86-87. old./

A kísérlet rokon vonásokat mutat Davidov és Elkonyin professzorok irányításával a Szovjetunióban, Dienes professzor irányításával Kanakában, Ktygowska professzorasszony irányításával Lengyelországban folyó kísérletekkel. Elsősorban Dienes módszerét alkalmazták, de azt a hazai valóság realitáshoz igyekeztek igazítani. Dienes szerint a tanulók már a konkrét műveletek korában is "megragadhatják" a matematika alapvető strukturáit, csupán megfelelő konkretizációkban kell bemutatni azokat. A cselekvésben való konkretizálás is hozható és továbbíthat egy matematikai strukturát. A különböző matematikai strukturákra és fogalmakra változatos konkretizációkat, munkaeszközöket, munkalapokat alkalmaztak.

A kísérlet jellemző vonása még, hogy tartalmi anyaga megválasztásánál

- a matematika univerzális fogalmaival /halmazelmélet, matematika, logika, .../ tervszerűen átszőtték a tananyagot - ezzel biztosítva a matematika egységes szemlélését;
- biztosították a fogalmak fokozatos érlelését.

"A komplex matematika tanítás talán elsődleges célja, a tanulók megsegítése a matematikai absztrakciók megalkotásában,

az absztrahálás képességének elsajátításában. Ebben elméletileg elsősorban "az interiorizáció" fogalmának Piaget, Vigotszkij, Leontyev és Dienes elméletére támaszkodnak." /Klein 1980. 44. old./

A kísérlet alapelve nem egy bizonyos, hanem eklektikus módon sok helyről származók, de egymással szoros kapcsolatban levők. Ilyenek pl. /nem fontossági sorrendben/:

- tanítás helyett tanulás;
- szemléltetés helyett cselekedtetés;
- tanulók differenciált foglalkoztatása;
- önállóságra nevelés;
- tévedés és vita szabadsága;
- belső motiváció biztosítása;
- "igazi" matematika.

Eredményes változást csak olyan oktatás hozhat, amely a korszerűen felépített anyaghoz szervesen kapcsolódó korszerű módszereken alapul, ezeket pedig a mindenkori matematikatanítás fő feladata határozza meg. "A komplex matematikai kísérlet vezetői tehát a matematikatanítás fő feladatának tekintik a dialektikus gondolkodásra való nevelést. /Ez pontosabban a problémák dialektikus megoldására való nevelést jelenti/" /Klein 1980. 35. old./ A tanulók gondolkodásának fejlesztése, a képességfejlesztés és az egyes tantárgyak

/itt matematika/ tartalmi-módszertani korszerűsítése egymással szoros kölcsönhatásban oldható meg.

A komplex matematikai kísérlet, az említetteken kívül a kombinatorika feldolgozásával is hozzájárul a kombinatív képesség fejlesztéséhez.

2.2. Tantervi változások:

Az új matematika tanterv bevezetését 1978-tól kezdték meg. A bevezetés lépcsőzetesen történt, annak ellenére, hogy kidolgozását hosszú kísérleti munka előzte meg:

- 1963-1974-ig az un. előkészítő kísérletek /Lénárd

Ferenc, Varga Tamás, .../

- 1974-től ugyancsak lépcsőzetesen bevezetésre kerülő ideiglenes tanterv.

A tanterv-tervezet kidolgozói megvizsgálták a hazai matematikatanítási kísérleteket és tanulmányozták a külföldi hasonló törekvéseket is. Döntésük értelmében a komplex matematikatanítási kísérlet munkájára épülő tantervjavaslat lett a reformtanterv alapja.

Ellentétben a korábbi tantervi változásokkal, amikor a különböző igényeknek megfelelő új témakörök az iskoláztatási idő vagy az óraszámok növelése révén hozzákapcsolódtak a korábbi tantervek anyagához, a mostani, tartalmi megújítást, a tananyag értelemszerű és gyökeres átalakítását jelentette.

/Az iskolarendszer alapvető szerkezete, struktúrája nem változott meg./

A gazdasági társadalmi feltételek, a minden területen gyorsuló fejlődés olyan követelményeket támaszt az iskolával szemben, amelyet csak korszerű műveltségi tartalommal és módszerekkel, a szocialista iskola nevelési funkcióinak újszerű értelmezésével lehet megvalósítani.

Emiatt a tartalmi fejlesztés során az volt a kiindulási szempont, hogy a matematikai alapok lerakását és azoknak a képességeknek a fejlesztését kell biztosítani, amelyek alkalmassá teszik a tanulókat ismereteik állandó gyarapítására. Mindez a nevelés folyamatában valósul meg, "... amelyben alakul, fejlődik a gyermek személyisége. A nevelés egyrészt megőrzi a régit, az előremutatót, másrészt azonban túlhaladja a régit, az elavultat és segíti a fejlődést, és mutat előre a jövőbe." /Ágoston, 1973.

A reformtanterv, amely tartalmilag nem tér el az un. ideiglenes tantervtől, közvetve tehát a korszerűsítést szolgáló matematikai kísérletek tartalmi és pszichológiai vonatkozású tapasztalataira épült:

- Az általános iskola alsó tagozatában meg lehetett és meg kellett kezdeni a tudomány olyan alapfogalmainak bevezetését, mint a halmaz, reláció, a függvény, algebra, geometria, kombinatorika, valószínűségszámítás, matematikai logika. A témák egymásra épülve, minden

évben gazdagodnak, mindig igényesebb feladatsorok feldolgozása során.

- A tananyag tartalmazza a megtanulandó ismereteket, amelyek elsajátítása nem csupán az ismeretek körének bővülését jelenti, hanem a tanítás-tanulás folyamatában fejlődnek a gyermekek képességei, a követelmények teljesítése mértékében.
- Az általános képességek kifejlesztése is lehetővé és teljesítendő feladattá válik, mint például az önellenőrzés, rendszeresség, tervszerűség, pontosság, taláslékonyság, stb.
- Pszichológiai konklúziók alapján a tananyagfeldolgozás fontos jellemzője, hogy a tanulói tevékenységnek minden eddiginél nagyobb szerepet biztosít a fogalom kialakítás útján.

3. A kombinatorika helye, szerepe a jelenlegi matematika tantárgyban alsó tagozaton

Az általános iskolában a kombinatorika feldolgozásának nem az a célja, hogy a kombinatorikai fogalmakat, ill. a velük kapcsolatos képleteket megtanítsuk. Az a törekvés,

hogy az egyes problémákkal kapcsolatban olyan eljárásokat, rendező elveket találjanak a tanulók, amelyek alkalmasak az összes lehetséges eset számbavételére. Bizonyos feladatok megoldásánál alkalmazott eljárások részben vagy egészben jól használhatók más feladatok megoldásánál is.

Ismeretes, hogy a permutációk, variációk és kombinációk /akár ismétlés nélkül, akár ismétléssel/ csak speciális kombinatorikai problémák. Nem minden kombinatorikai feladat tartozik ezek valamelyikéhez. A kombinatorikai feladatok megoldása során elsajátított eljárások alapján az említett egyszerű feladattípusok is megoldhatók.

A kombinatorikus szemléletmód és feladatmegoldó módszerek formálása már az óvodában megkezdődik, s folytatódik az iskolai tanulmányok során. A jelenlegi óvodai foglalkozások anyagában nem szerepel más témához, pl. a számfogalom előkészítéséhez hasonló részletességgel a kombinatorika. Néhány alkalommal előfordul pl. toronyépítés /színek szerinti változatok keresése/; színes papírból kivágott síkidomok egymás mellé helyezése más-más sorrendben. Az 5. osztály kombinatorika anyaga jól illeszkedik az alsó tagozatos tananyaghoz, új követelmény nincs is a korábbihoz képest, így is biztosított a zökkenőmentes átmenet.

A kombinatorika témakör a gyerekekhez közelálló feladatokat tartalmaz, felkelti érdeklődésüket.

A tananyag megfelelő felépítésével és játékos feldolgozásával elérhető, hogy a legfontosabb fogalmakat a tanulók tapasztalatból absztrahálják, majd a kiépített elméletet alkalmazzák.

A tananyag feldolgozása nem lineárisan történik, nem jellemző az egyes anyagrészek időről időre történő lezárása. A kombinatorikai problémákra egyre nagyobb igényességgel, követelménnyel és absztraktabb szinten visszatérünk. Fokozatosság figyelhető meg a tartalamban - eleinte kirakások, majd színezések, később betűk, számok felhasználása - ezáltal egyre absztraktabb szintű a tapasztalatszerzés, ezenkívül fokozatosságot biztosítunk a felhasználandó adatok, ill. a keresendő jó megoldások számában.

A kombinatorika téma tananyaga és követelménye az alsó tagozatban "Az általános iskolai nevelés és oktatás tervé"-ben található:

1. osztály

Tananyag: "Egyszerű kombinatorikus feladatok minél több lehetőség előállítására, megkülönböztetésére. A különféle esetek lejegyzése rajzzal, jelekkel. /Pl. toronyépítés, korongok dobása, kockadobás, golyók húzása./"

Követelmény: "Legyen járatos egyszerű feltételeknek megfelelő minél több lehetőség előállításában: adott számjegyekből számok készítése színes kockából tornyok építése stb. ilyenek megkülönböztetése."

2. osztály

Tananyag: "Két /három/ halmaz elemeiből képezhető párok /hármaskok/ keresése. Egyszerű esetekben az összes pár /hármask/ megkeresése, megszámlálása. Egyéb kombinatorikai feladatokban minél több lehetőség keresése, egyszerűbb esetekben az összes lehetőség felsorolása."

Követelmény: "Legyen képes az adott feltételeknek megfelelő kombinatorikus lehetőségeket /egyszerűbb esetben minden lehetőséget/ megkeresni tárgyakkal, rajzokkal, jelekkel."

3. osztály

Tananyag: "Kombinatorikai feladatok: számok, szavak képzése számjegyekből, betűkből adott feltételekkel. A lehetőségek számának megállapítása egyszerű esetekben. Ábrázolás fadiagrammal."

Követelmény: "Oldjon meg egyszerű kombinatorikus feladatokat tevékenységgel, rajzzal. Állapítsa meg a lehetőségek számát."

4. osztály

Tananyag: "Kombinatorikus feladatokhoz fadiagramok, utdiagramok, táblázatos elrendezések készítése, ilyen módon az összes lehetőség áttekintése.

A kombinatorikai feladatok megoldásakor talált esetek számának rendszeres felírása számsorozattal, egyszerű esetekben."

Követelmény: "Legyen képes egyszerű esetekben törvényszerűségek megfogalmazására; kísérletek eredményeinek, problémák számadatainak sorozatba vagy táblázatba rendezésére kombinatorikával, valószínűséggel kapcsolatban is."

A 4. osztályban megpróbálkozunk egy-egy anyagrész áttekintésével, rendszerezésével. Jól mutatja ezt a törekvést a kombinatorika tananyaga és követelménye. Ezekhez igazodva a ciklusos bontású tanmenetjavaslatban három időszakban /3. ciklus, 9. ciklus, 16-17. ciklus/ összesen 22 tanórán fordul elő hangsúlyosan ez a témakör. Ez azt jelenti, hogy ebben az időszakban az átlagosan egy órára jutó 3-4 résztéma közül a kombinatorikai feladatok megoldására fordítunk legtöbb időt.

3. ciklus: Kombinatorikai feladatokhoz gráfok készítése. Azonos gráfra vezető kombinatorikai problémák. Összes lehetőség keresése.

9. ciklus: Egy adat rendszeres változtatása; a kapott lehetőségek számához sorozat készítése, folytatása.

16-17. ciklus: Egy vagy több adat rendszeres változtatása; táblázatok kitöltése.

Ha összehasonlítjuk az alsó tagozat egyes osztályaiban előforduló feladattípusokat, látszatra sok a hasonlóság. Minden osztály feladatanyagában megtalálhatók a pl.: zászlószi-
nezés, számképzés, monogram készítés, kézfogás, stb. témájú, hasonló jellegűnek tűnő feladatok. A tananyag lineáris és koncentrikus bővülését azáltal biztosítják, hogy ezeknél a típusu feladatoknál az adatok számában, azok rendszeres változtatásában, a feltételek megfogalmazásában, a lehetőségek keresett számában valamint a megoldások módjában vannak különbségek az egyes osztályok tananyagában és követelményében.

A feladatok megoldásakor, a megfigyelések során gyűjtött tapasztalatok összegezése, elmondása, ábrázolása lehetőséget teremt a tanulók gondolkodásának fejlesztésére, a rendszerezés, az áttekinthetőség, a döntési képesség, a vitakészség kialakítására.

Az alsó tagozat kombinatorika anyagát és az alkalmazott új módszereket vizsgálva úgy találjuk, hogy tartalmával és a megfelelő mennyiségű és minőségű cselekvés igény-

lésével lehetőséget biztosít a kombinatív képesség fejlesztésére.

A lehetőség teremtése önmagában nem jelenti, hogy egyértelműen biztosított a fejlődés. Meg kell vizsgálnunk, hogy a tartalmi szempontból megfelelően tartott feladattípusok elegendő számban kerülnek-e feldolgozásra.

A kombinatorikai feladatok tartalmi szempontból a matematika más területéhez is kapcsolódhatnak. Ezáltal sokféleségükkel jól szolgálhatják a tágabban értelmezett kombinatív képesség fejlesztését.

Ugy gondoljuk, hogy az új tanterv a korábbi tantervek-nél jobban szolgálja a kombinatorikai képesség fejlesztését. Ez a fejlődés mennyiségi és minőségi szempontból gazdagabb feladatanyag felhasználásával fokozható.

III. A KOMBINATIV KÉPESSÉG FEJLESZTÉSÉRE KIALAKÍTOTT PROGRAM

1. A kombinatív képesség fejlesztésére kialakított program célja

A tanítási-tanulási folyamatban alkalmazott valameny-nyi eljárásnak az iskolai oktatás-nevelés célrendszerét kell szolgálnia. A kombinatív képesség fejlesztése csak egy része a személyiségfejlesztésnek, ezen belül az értelmi fejlesztésnek. Ehhez fel kell tárni a fejlődés lehetőségeit, tudatos és tervszerű munkával kidolgozni a fejlesztés optimális stratégiáját.

Célunk, hogy az iskolai oktató-nevelő munka során egy elsősorban kombinatív képességfejlesztés szempontú matematikai anyag kipróbálásával, hatásának vizsgálatával tapasztalatokat szerezzünk a kombinatív képesség valamilyen szintű megjelenéséről és fejlesztetheetőségéről.

Feladatunk, hogy bővítsük a fejlesztésben résztvevők tapasztalatainak körét és mélységét a feltételrendszer értelmezésében, a lehetőségek keresésében, gyorsítsuk a felsorolási algoritmusok kialakítását.

Ismeretes, hogy a képességek általában, így a kombinatív műveleti képesség is tevékenységben nyilvánul meg és tevékenység közben fejlődik. Vagyis a kombinatív képesség

fejlesztése csakis működtetésén keresztül valósul meg.

Célunk megvalósítása érdekében olyan feladatanyaggal dolgoztunk, amely megoldása során a kombinatív képességet működtetni kell. A feladatok szerkesztésénél abból indultunk ki, hogy megvalósuljon az elmélet/itt most a kombinatív képesség értelmezése/ és gyakorlat /iskolai matematikatanítás/ egysége.

A fejlesztő munkánk az I. fejezetben részletesen ismertetett rendszerszemléletű képességkonceptción alapul. A kombinatív képesség a kombinatív műveletek rendszere. A kombinatív műveletek állandósult pszichikus rendszerek, amelyek a műveleti strukturák interiorizálása révén alakulnak ki. Ezek a műveleti strukturák az elemi műveleteknek a korábbi szinteken megjelenő részek: hasonlítások, felcserélések, szimmetriák, konkrét rendszerezési sémák - sajátos egybeépülésével jönnek létre, amelyek az adott feltételrendszernek megfelelően az összes lehetséges összeállítás felsorolásához elvezetnek. A kialakulás egyik feltétele, hogy a rendszerré összeálló műveletsor ne legyen túl hosszú, ne legyen túl bonyolult, és sokféle tartalom működtessük.

A kombinatív műveleti képesség egy nyolc művelethől álló rendszerrel modellezhető. A fejlődés gyorsítása érdekében a feladatokat e rendszer működtetéséhez alkottuk, esetenként felhasználva különböző tankönyvek, feladatgyűjte-

mények anyagát, amelyeket legtöbbször átfogalmaztunk célunk érdekében.

A feladatgyűjteményt az új tanterv matematika anyagára, módszereire, eljárásaira alapozva állítottuk össze, kiemelten figyelve arra, hogy az alsó tagozat utolsó osztályában kombinatorika témából mi a tananyag és milyen követelményeknek kell eleget tenni a tanulóknak.

A műveleti képesség működése a művelet előtti és a konkrét műveletek szintjén a tartalom által korlátozott, ezért ennek döntő szerepe lehet. Csak valóságos tárgyakhoz és konkrét tevékenységhez kapcsolódva nyilvánul meg. A formális szinten a megjelenő kombinatív műveletekről feltételezzük, hogy azok az előző fejlettségi szinteken elvégzett cselekvések rendszerre szerveződése révén jönnek létre. Az első osztályokban teljesen szabadon manipulálhatnak toronyépítés, utkésztetés, gyöngyfűzés, zászlószínezés, számkártyák felhasználásával számképzés, stb. témájú feladatokban. Ettől a szinttől kell eljutniuk egy adat rendszeres változtatásáig és megvizsgálni az egy adat rendszeres változtatásának a lehetőségek számát befolyásoló hatását.

Néhány feladattípus az elmondottak illusztrálására:

Pl.

Zászlószínezés:

- a felhasználható színek számának /1, 2, 3, 4, .../ változása;

- azonos színszám mellett 1, 2, 3, 4, ... csíku zászló készítése;
- 1, 2, 3, 4, ... színű zászló készítése ...

Zárt dobozból golyók húzása:

- a különböző színű golyók számának változtatása pl.: 1, 2, 3, 4, ... db.;
- ezekből egyidejűleg húzott golyók számának változtatása pl.: 1, 2, 3, 4, ... db.;
- a golyók között azonos színűek előfordulása
- többféle azonos színű golyó előfordulása ...

Számképzés:

- számkártyák felhasználása;
- számjegyek felhasználása;
- 1, 2, 3, 4, 5, stb. különböző számjegyek felhasználásával képezhető 1, 2, 3, 4, 5, stb. jegyű számok képzése;
- a felhasználható számjegyek között azonosak is vannak;
- a felhasználható számjegyek között előfordul a 0 ...

A fejlődés a megoldás módjában is követhető. Eleinte az elkészített összeállítások közül kikeresik a különbözőket, majd összegyűjtik az összes megoldást. Később az oszlopos, táblázatos, fa- és utdiagrammal történő megoldási módok segítségével - bizonyos feladatok esetében - az összes lehetőség megkereséséig is eljutnak.

Megemlítendő, hogy harmadikos, de főleg a negyedikos anyag feladatainak megoldásánál az összeszámlálás mellett megjelenik a következtetés a lehetőségek számára. Természetesen arra vigyázva, hogy az általánosítás csak elegendő eset kipróbálását kövesse. Így esetenként már a szabály felismerése vezet el a probléma megoldásához.

2. A feladatgyűjtemény bemutatása

A 67 feladatból álló feladatgyűjtemény jellemzését csak bizonyos feladattípusokhoz tartozó feladatok bemutatásával végezzük.

Utalunk a kombinatorikai műveletre, a kombinatív műveletre amelyek eredményeként létrejönnek az egyes konstrukciók, jellemezzük ezeket a bonyolultsági fok szerint, esetenként az összes különböző konstrukció felsorolását biztosító ábrázolási módot is bemutatjuk.

Az egyes feladattípusokhoz tartozó feladatok megfogalmazásánál arra törekedtünk, hogy az adatok, feltételek, kikötések számát úgy adjuk meg, hogy a fokozatosságot, fejlesztést biztosítsuk a gyengék és jók számára egyaránt. Találhatók gyakorlást és továbbfejlesztést szolgáló feladatok. A feladatok sorrendje nem utal a nehézségi fokokra.

Figyelmet fordítottunk arra, hogy a kombinatív képességet működtető feladatokat a gyermekekhez közelálló tartalomba ágyazzuk. Ügyeltünk arra, hogy a matematika minél több területéhez kapcsolódjunk.

Pl. geometria - síkidomok és alkotóelemeik /pontok, szakaszok, sokszögek/ ...

sorozatok - adatok számának rendszeres változtatása, következtetés a lehetőségek számára, ...

reláció - relációtulajdonságok /kézfogás, átlók/ ...

számfogalom - számalkotás, helyiértékrendszer ...

műveletfogalom - oszthatóság, ...

A megértést, a feltételrendszer helyes értelmezését az életkornak megfelelő kifejezések felhasználásával egyértelmű megfogalmazásokkal igyekeztünk biztosítani.

Felhasználtuk az 1. sz. mérés tapasztalatait /ld. IV. fejezet/. Ezért nem elhanyagolva a többi területet kiemelt figyelmet fordítottunk az ismétléses variációk és kombinációk képzésére, a speciális műveleti sémák kialakulására. A feladatok számával szélesebb skálát engedtünk a folyamatos gyakorlásnak, a többféle kombinatorikai problémát tartalmazó feladatokkal az összefüggések megértésének, a műveletek egymásra épülésének. Az érvényben lévő tantervi keretek között, a tanterv elvárásainak is eleget téve változatosságot biztosítottunk a kombinatív műveletek működtetésének igénye szerint is. Mindezt olyan feladatokkal, amelyek meg-

oldhatók a tanulók korábbi ismeretivel, a manipulációs tevékenység során gyűjtött tapasztalatok felhasználásával.

A kombinatív képesség szempontjából jelentősebb konstrukcióképzésre közvetlenül utal a feladatok negyed része. A konstrukciók számára vonatkozó kérdés megválaszolásához is legtöbb esetben el kell készíteniük a konstrukciókat, majd ezeket összeszámolják. Közvetve tehát ezek a feladatok is konstrukciók előállítását vagy ezek egy részének előállítását kívánják meg. A gyerekek ez utóbbi esetben a konstrukciók közötti kapcsolatot, magát az előállítás lépéseit ábrázoló "rendszer" alapján következtetnek, válaszolnak a számszerűségekre vonatkozó kérdésre.

A feladatok kétharmadánál egy, egyharmadánál két vagy több kombinatív művelet működésére volt szükség.

A kombinatív műveletek típusai szerint a feladatok számszerű megoszlása:

I. Descartes-féle szorzat képzése	9 feladat	
Ismétléses variáció képzése	14	"
Ismétlés nélküli variáció képzése	9	"
/ismétlés nélküli permutáció képzése/	13	"
/ciklikus permutáció képzése/	2	"
Összes ismétléses variáció képzése	3	"

II. Ismétléses kombináció képzése	2 feladat
Ismétléses permutáció képzése	6 "
Ism. nélküli kombináció képzése	14 "
Halmazok összes részhalmazának képzése	3 "

/Megjegyzés: a feladatok összámtól való eltérés azzal magyarázható, hogy néhány feladathoz többféle kombinatorív művelet tartozik./

FELADATTIPUSOK

Számok alkotása:

a/ A létrehozandó két-, három-, négy-, ... jegyű számokban a számjegyek különbözők

Pl. 30. feladat

"Alkoss olyan háromjegyű számokat, amelyekben a számjegyek nem egyenlők és mindegyik számjegy nagyobb 5-nél!

Hány ilyen szám van?"

- Elemi kombinatorív művelet: ismétlés nélküli variációk képzése.

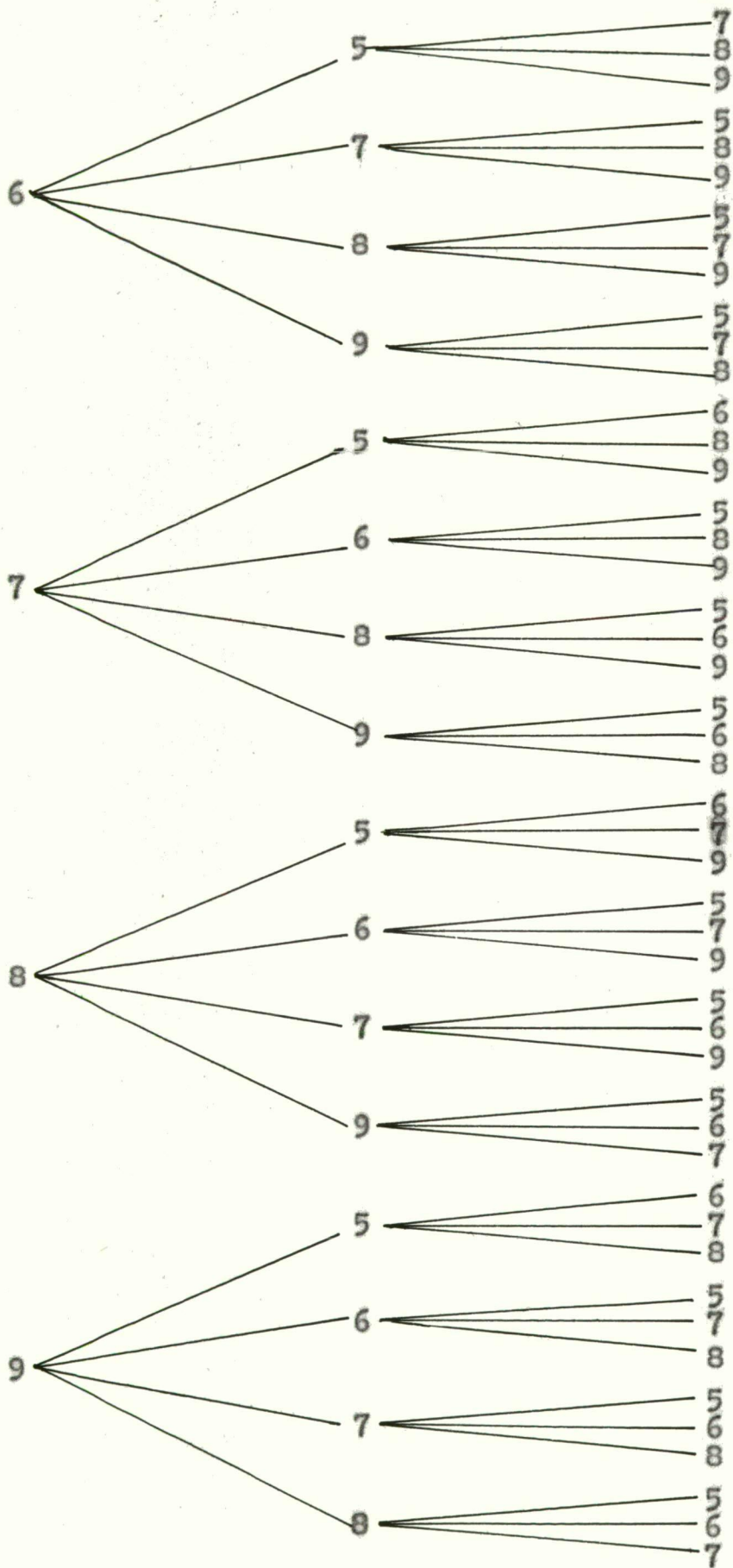
- Kiindulási elemek: 6, 7, 8, 9

- Ábrázolás: fa-gráffal

százaz

tiées

egyes



46. feladat

"Írd le az 1, 2, 3, 4 számjegyekből alkotható összes olyan

a/ egyjegyű

b/ kétjegyű

c/ háromjegyű

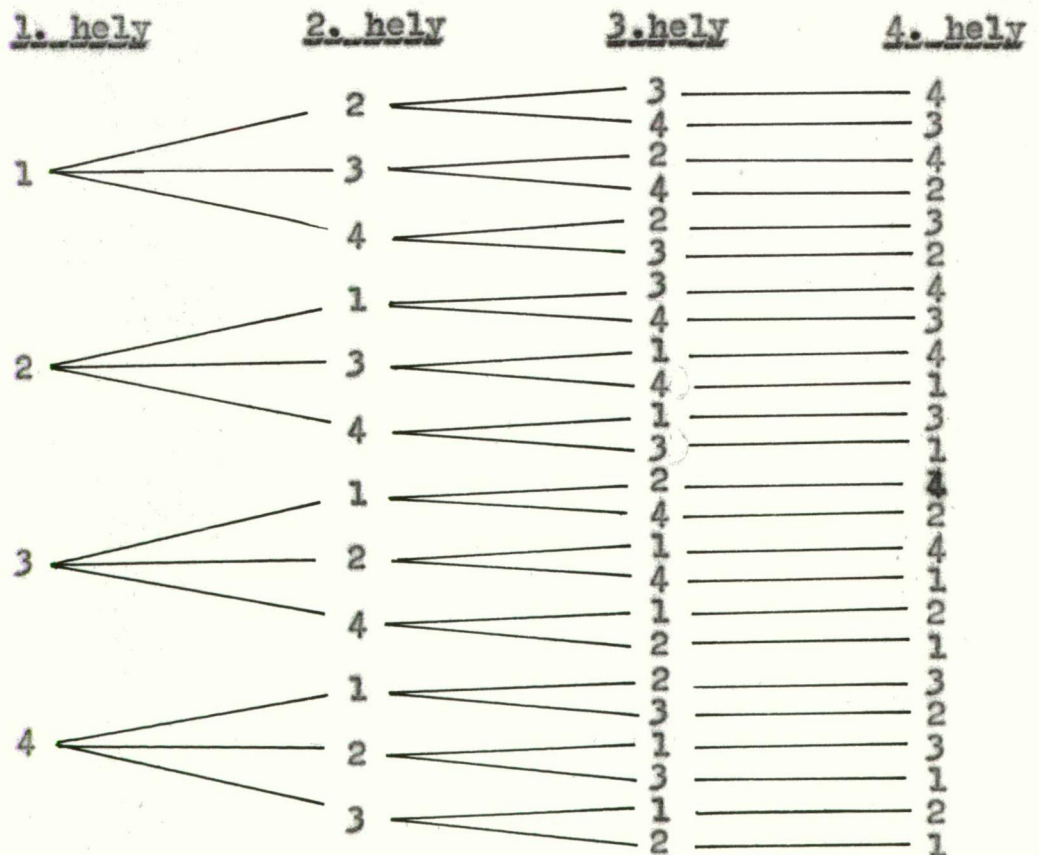
d/ négyjegyű

számot, amelyben egyetlen számjegy
sem fordul elő egynél többször!

Készíts fadiagramot! /Elég csak a négyjegyű számokról, a
többi erről leolvasható!/"

- Összetett kombinatorik művelet: ismétlés nélküli variációk
képzése /spec. eseteként - 4 elem ism. nélk. permutációja
is szerepel/.

- Ábrázolás: fa-gráffal



Megjegyzés: A legnagyobb helyiértékű szám az egyes részfeladatokon /a, b, c, d/ belül a legkisebb sorszámu helyen értendő.

48. feladat

"Ezek a számkártyáid vannak:

1

2

3

4

5

6

Hány különböző kétjegyű számot tudsz kirakni ezekkel a kártyákkal?"

- Elemi kombinatorív művelet: ismétlés nélküli variációk képzése.
- Ábrázolás: fadiagrammal /ld. előző feladatok/

b/ A létrehozandó két-, három-, négy-, ... jegyű számokban a számjegyek azonosak is lehetnek:

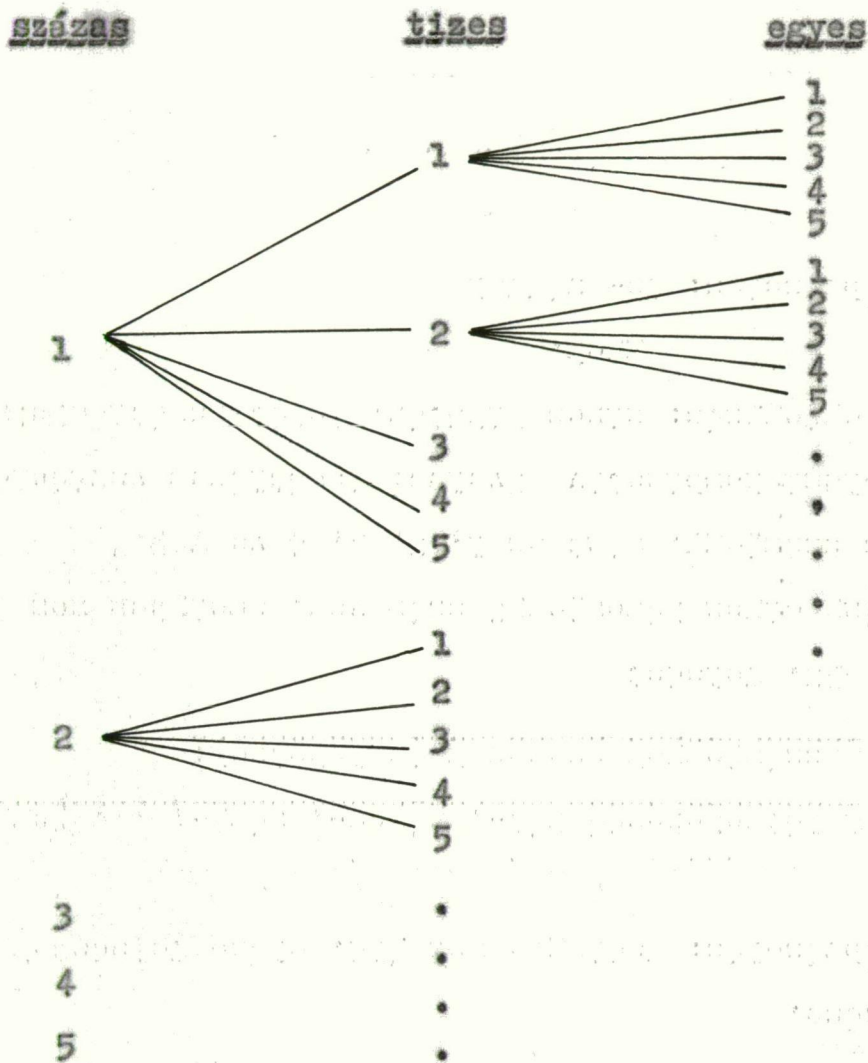
Pl. 38. feladat

"Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben nem fordul elő más számjegy, mint az 1, 2, 3, 4 vagy 5."

- Elemi kombinatorív művelet: ismétléses variációk képzése.

Megjegyzés: nincs kikötés, tehát ismétlődhetnek a számjegyek.

- Ábrázolás: fa-gráffal



37. feladat

"Hány négyjegyű szám képezhető a 2-es és 5-ös számjegyekből, ha kikötjük, hogy minden számban szerepeljen mindkét számjegy?"

- Elemi kombinatorikai művelet: ismétléses variációk képzése.
- Megjegyzés: a "minden számban szerepeljen mindkét számjegy feltételt a 2222 és az 5555 nem teljesíti.
- Ábrázolás: fa-gráffal

36. feladat

"Hány négyjegyű szám van, amelynek számjegyei között 2-nél nagyobb számjegy nem fordul elő, de egy-egy számban ugyanaz a számjegy legfeljebb kétszer szerepel. Írd le ezeket!"

- Egyszerű kombinatorikus művelet: ismétléses permutációk képzése.

- Megjegyzések: - a felhasználható számjegyek 0, 1, 2;

- az elkészített számnégyesek között nem szerepelhet a 0-t első helyen tartalmazó;

- a felhasználható számjegy-csoportok:

(0,0,1,2); (0,1,1,2); (0,1,2,2);

(0,0,1,1); (0,0,2,2); (1,1,2,2).

- Ábrázolás: fa-gráf és osztályozás

Pl. 0,0,1,2 számjegyeket tartalmazó különböző számnégyesek, illetve négyjegyű számok előállítás:

	<u>1. hely</u>	<u>2. hely</u>	<u>3. hely</u>	<u>4. hely</u>	
Nem négy- jegyű szá- mok!	0	0	1	2	
			2	1	
		1	0	2	
			2	0	
	0	2	0	1	
			1	2	
		0	2	1	
			1	2	
	1	0	2	0	
			1	2	
		1	0	2	
			2	0	
	2	0	0	2	1002
			2	0	
		0	0	2	1020
			2	0	
	2	0	0	0	1200
			0	0	
		0	1	0	2001
			1	0	
	2	0	0	1	2010
			1	0	
		0	0	0	2100
			0	0	

c/ Adott összegű számjegyek felhasználásával két-, három-, négyjegyű számok képzése:

Pl. 52. feladat

"a/ Állíts elő kétjegyű számokat, amelyekben a számjegyek összege 5 !

b/ Állíts elő háromjegyű számokat, amelyekben a számjegyek összege 5 !

Hány különbözőt találtál?"

- Egyszerű kombinatív művelet: ismétléses és ismétlés nélküli permutációk képzése.

- Elemzés:

- Nincs a feltételek között, hogy egy-egy háromjegyű számban a számjegyek különbözők

- 0 nem állhat az első helyen

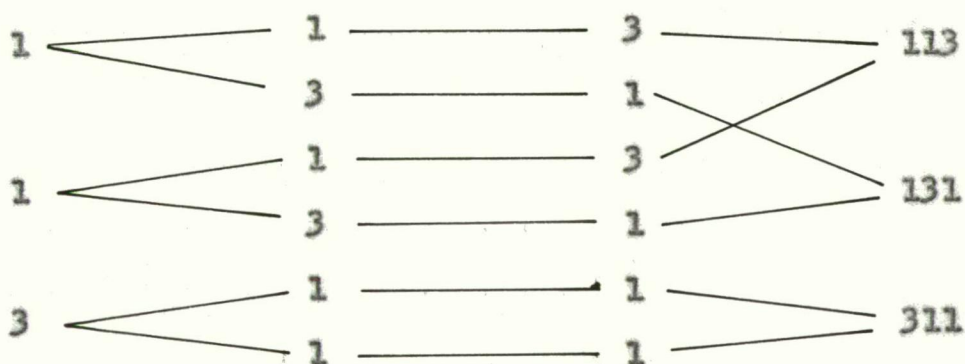
- a/ A felhasználható számjegy párok: (0,5); (1,4); (2,3).

b/ A felhasználható számjegy-hármasok:

(0,0,5); (0,1,4); (0,2,3); (1,1,3); (1,2,2).

- Ábrázolás: fa-gráf és osztályozás

Pl. 1,1,3 számjegyekből háromjegyű számok alkotása:



44. feladat

"Állíts össze minél több háromjegyű számot, amelyekben a számjegyek összege 9. Hány ilyen lesz? Tippelj!"

- Egyszerű kombinatorikus művelet: ismétléses permutációk és ismétlés nélküli variációk /ismétlés nélküli permutációk/ képzése.

- Elemzés:

- 0 is szerepelhet
- egy számban azonos számjegyek is előfordulhatnak, hiszen nincs ezt kizáró feltétel
- a felhasználható számjegy-hármasok /kiindulási elemek/:

/0,1,8/; /0,2,7/; /0,3,6/; /0,4,5/

/0,0,9/; /3,3,3/; /1,1,7/; /2,2,5/; /4,4,1/

/1,2,6/; /1,3,5/; /2,3,4/.

- Ábrázolás: fa-gráf

osztályozás

51. feladat

"Hány különböző kétjegyű

háromjegyű

négyjegyű szám alkotható, amelyekben a számjegyek összege 9?

Ha a/ a számjegyek különbözők

b/ a számjegyek között azonosak is lehetnek?"

- Egyszerű kombinatív műveletek: ismétléses és ismétlés nélküli permutációk /ismétlés nélküli variációk/ képzése.

- Elemzés:

- a számjegyek között szerepelhet a 0
- Felhasználható számjegy-csoportok:

kétjegyű számoknál:

a/ /0,9/; /1,8/; /2,7/; /3,6/; /4,5/

b/ nincs ilyen szám

háromjegyű számoknál:

a/ /0,1,8/; /0,2,7/; /0,3,6/; /0,4,5/

/1,2,6/; /1,3,5/; /2,3,4/;

b/ /0,0,9/; /3,3,3/; /1,1,7/; /2,2,5/; /4,4,1/

négyjegyű számoknál:

a/ /0,1,2,6/; /0,1,3,5/; /0,2,3,4/

b/ /0,0,0,9/; /0,0,1,8/; /0,0,2,7/; /0,0,3,6/; /0,0,4,5/

/0,3,3,3/; /0,1,1,7/; /0,2,2,5/; /0,4,4,1/

/1,1,1,6/; /1,1,2,5/; /1,1,3,4/;

/2,2,1,4/; /2,2,2,3/;

/3,3,1,2/

- Ábrázolás: fa-gráf és osztályozás /ld. 36. és 52. f./

A felhasználható számjegyekre vonatkoztatva felismerhető az összefüggés a két-, három-, négy jegyű számok között.

d/ Adott számmal osztható két-, három-, ... Negyű számok alkotása a megadott számjegyek felhasználásával:

Pl. 39. feladat

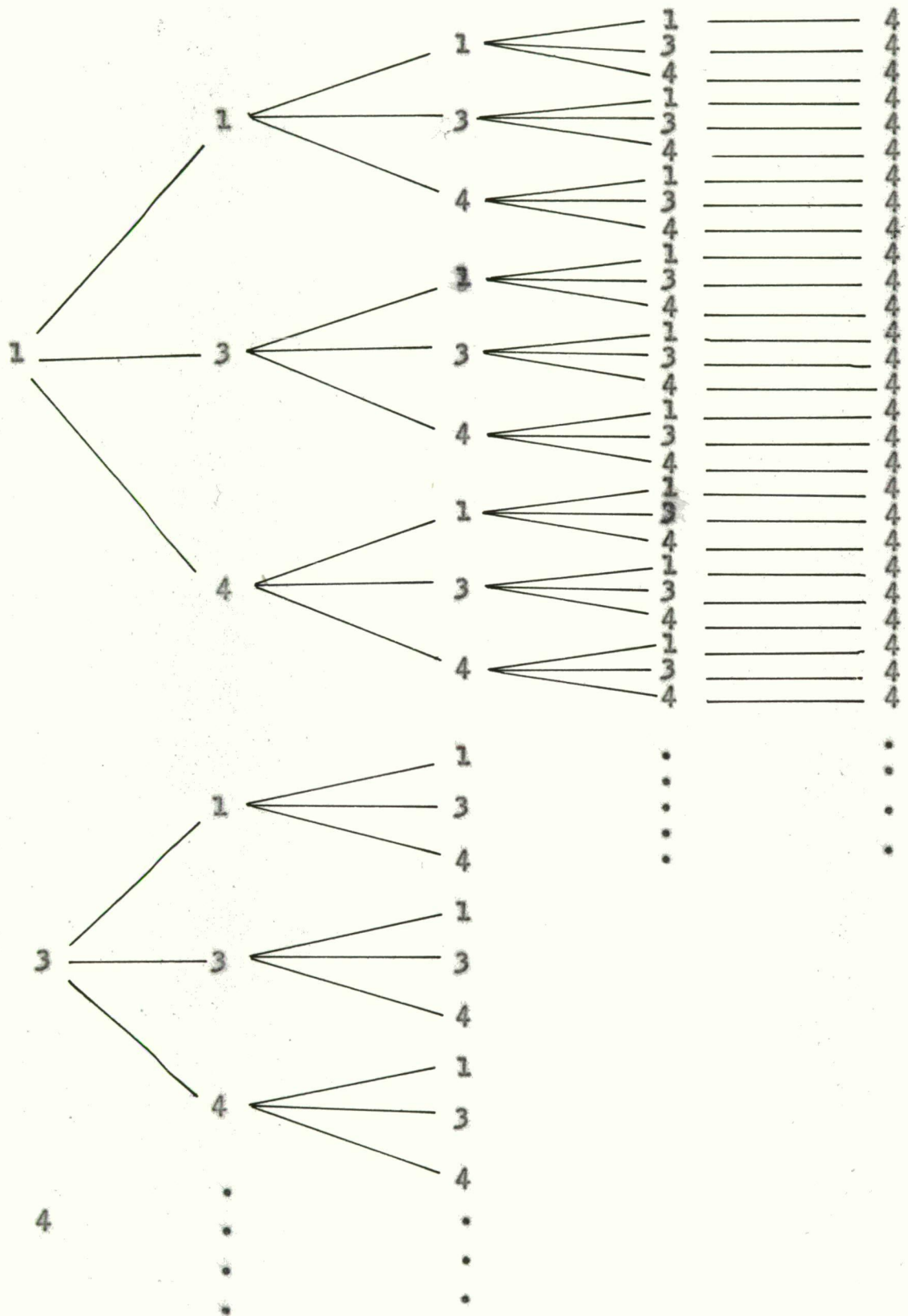
"Az 1,3,4 számjegyekből alkotott ötjegyű számok között hány páros van?"

- Elemi kombinatorik művelet: ismétléses variációk képzése.

- Elemzés:

- az utolsó helyen csak a 4 állhat

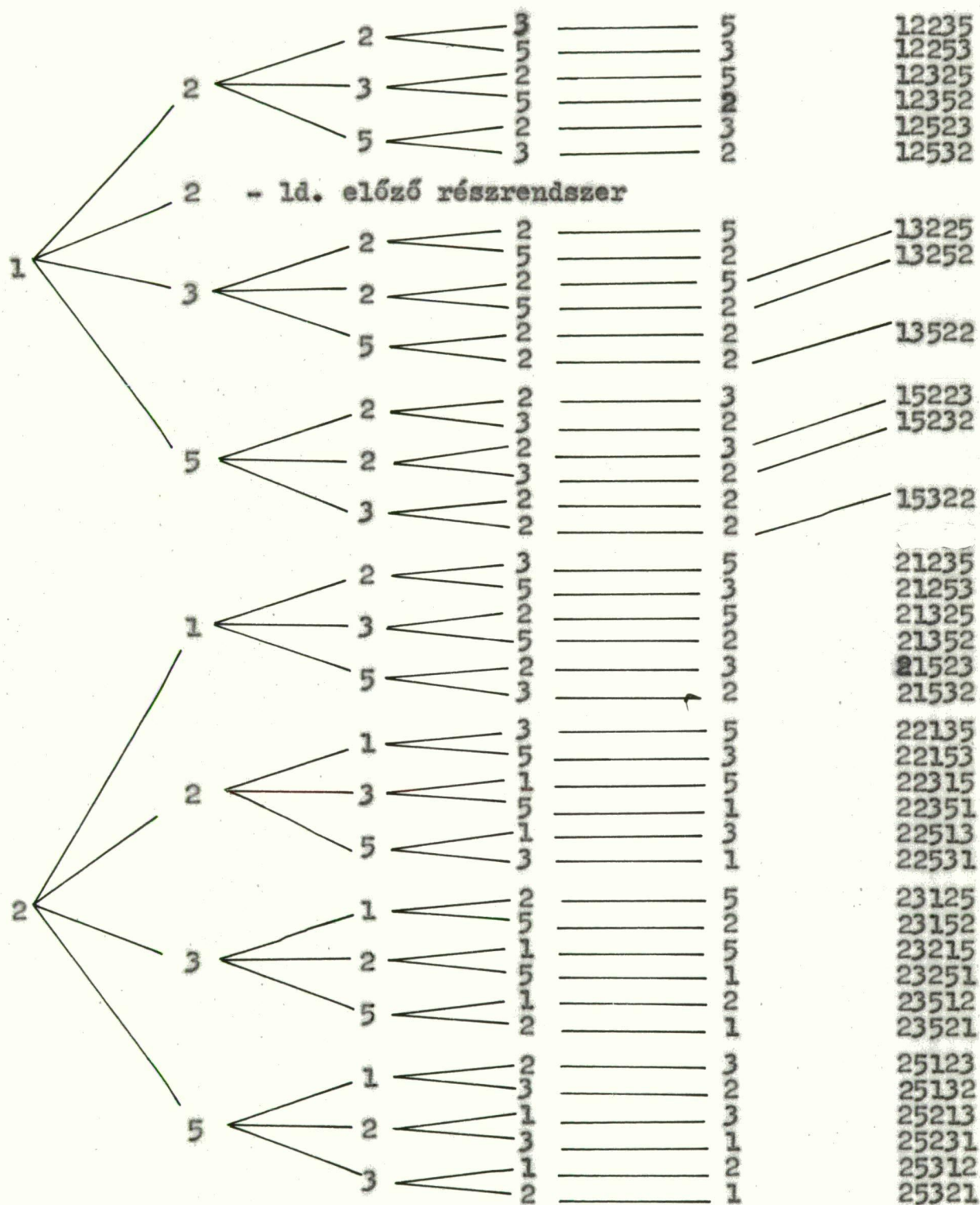
- Ábrázolás: fa-gráf



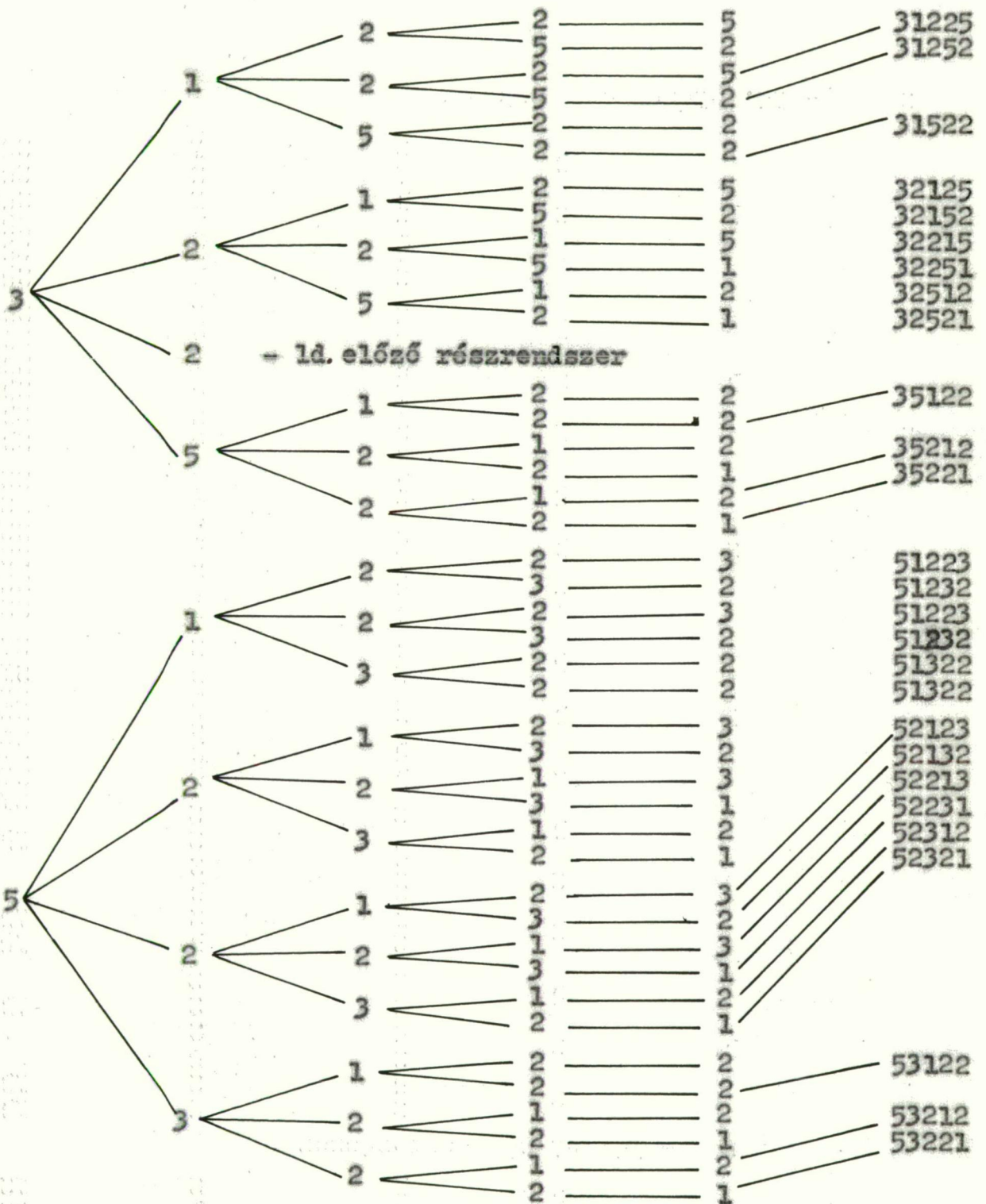
41. feladat

"Az 1, 2, 2, 3, 5 elemekből hány különböző ötjegyű szám alakítható? A kapott számok közül hány osztható 5-tel?"

- Egyszerű kombinatorikai művelet: ismétléses permutáció képzése.
- Elemzés: az 5-tel végződő számokat ki kell választani.
- Ábrázolás: - fa diagram
 - osztályozás



2 - ld. előző részrendszer



45. feladat

"Az 1, 2, 4, 5, 7 számjegyekből hány hárommal osztható háromjegyű szám készíthető?

- Egyszerű kombinatorikus művelet: ismétléses permutációk és ismétléses variációk /ismétlés nélküli permutációk/ képzése.

- Elemzés:

- hárommal való oszthatóság feltétele, hogy a számjegyek összege osztható legyen hárommal

- meg kell keresni a hárommal való oszthatóságnak eleget tevő számhármassokat, amelyekből a háromjegyű számokat képezzük.

- a számjegyek ismétlődhetnek egy-egy számon belül

- a felhasználható számjegy-hármassok:

/1,1,1/; /2,2,2/; /4,4,4/; /5,5,5/; /7,7,7/

/1,1,4/; /1,1,7/; /2,2,5/; /4,4,1/; /4,4,7/; /5,5,2/

/7,7,1/; /7,7,4/; /1,4,7/

- az egyes számhármassok elemei a kiinduló elemek

- Ábrázolás: fa-gráf ill. fa-gráf és osztályozás

Azonos gráfra vezető feladatok

- 10, 12; 29, 65, 67; 22, 67; 27, 57, 61; 62, 63; ...

sorszámú feladatok

Pl. 10. feladat

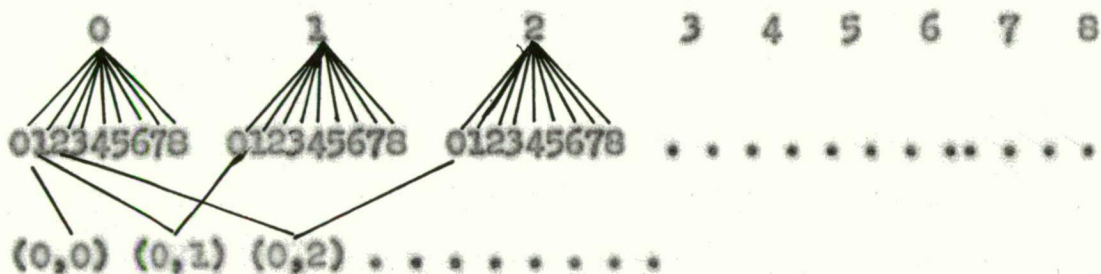
"Hányféleképpen köthetünk csokoba 5 szál különböző virágból /rózsa, szegfű, tulipán, nárcisz, margaréta/ hármat?"

Az összes lehetőség keresése:

Pl. 25. feladat

"Hány különböző domino készíthető, ha egy-egy oldalon legfeljebb 8 pötty lehet?"

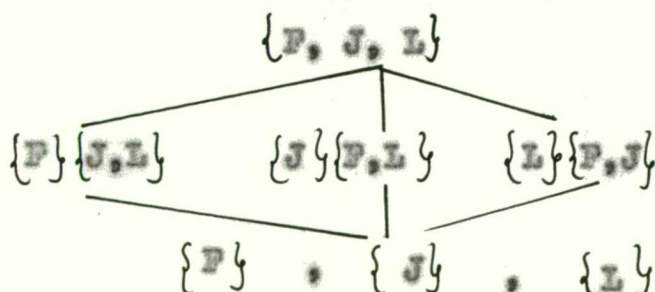
- Egyszerű kombinatorik művelet: ismétléses kombinációk képzése.
- Kiinduló elemek: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- Ábrázolása: fa gráffal az összes kételemű ismétléses variáció képzése
osztályozással az azonos ekvivalenciaosztályokba tartozók kiválasztása



Pl. 1. feladat

"Pori, Jani, Lali versenyt fut. Hogyan alakulhat az eredmény? Minden lehetséges beérkezést jegyezze le!"

- Elemzés: a feltételek nem zárják ki a holtverseny lehetőségét.
- Összetett kombinatorik művelet: 3 elemű halmaz összes osztályozásainak előállítás



- Az adott osztályok mint kiindulási elemek szerepelnek /ezeknek a lehetséges sorrendjét kell előállítani/

a/ Az $\{F\}$, $\{J\}$, $\{L\}$ különböző sorrendje adja a holtverseny nélküli lehetséges beérkezések számát.

b/ Az $\{F\}$ $\{J,L\}$, $\{J\}$ $\{F,L\}$, $\{L\}$ $\{F,J\}$ osztályozás két gyerek azonos helyre történő beérkezési csoportjait tartalmazza. Ezekhez tartozó különböző sorrendek:

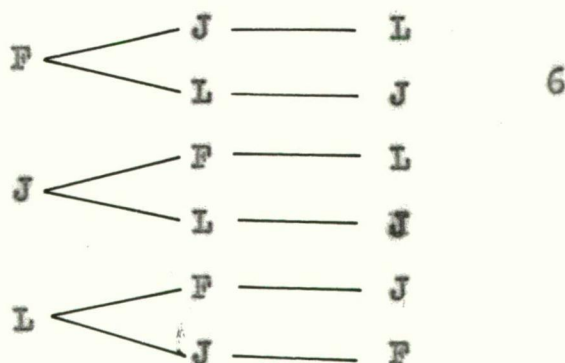
1. hely	F	J,L	J	F,L	L	F,J
2. hely	J,L	F	F,L	J	F,J	L
3. hely	-	-	-	-	-	-

A lehetséges beérkezések:

a/ Nincs holtverseny:

Lehetőségek

I.hely II.hely III.hely száma



b/ Holtverseny esetén:

- első helyen van holtverseny

- mindhárman egyszerre érnek be 1

- ketten érnek be egyszerre 3

- második helyen van holtverseny 3

- Ábrázolás:

/Valamennyi különböző lehetőség leolvasható/

I. hely	II. hely	III. hely
F	J	L
	L	J
J	F	L
	L	F
L	F	J
	J	F
F, J, L	-	-
F	J, L	-
J, L	F	-
J	F, L	-
F, L	J	-
L	F, J	-
F, J	L	-

Feltételek, adatok rendszeres változtatása, a kapott
esetek számának sorozatba rendezése:

a/ Változatlan kiindulási elemszám, változó hosszúságú konst-
rukciók létrehozása

Pl. 47. feladat

"Pontokból és vonásokból /ti(.), tá(-)/ hány

a/ egy-,

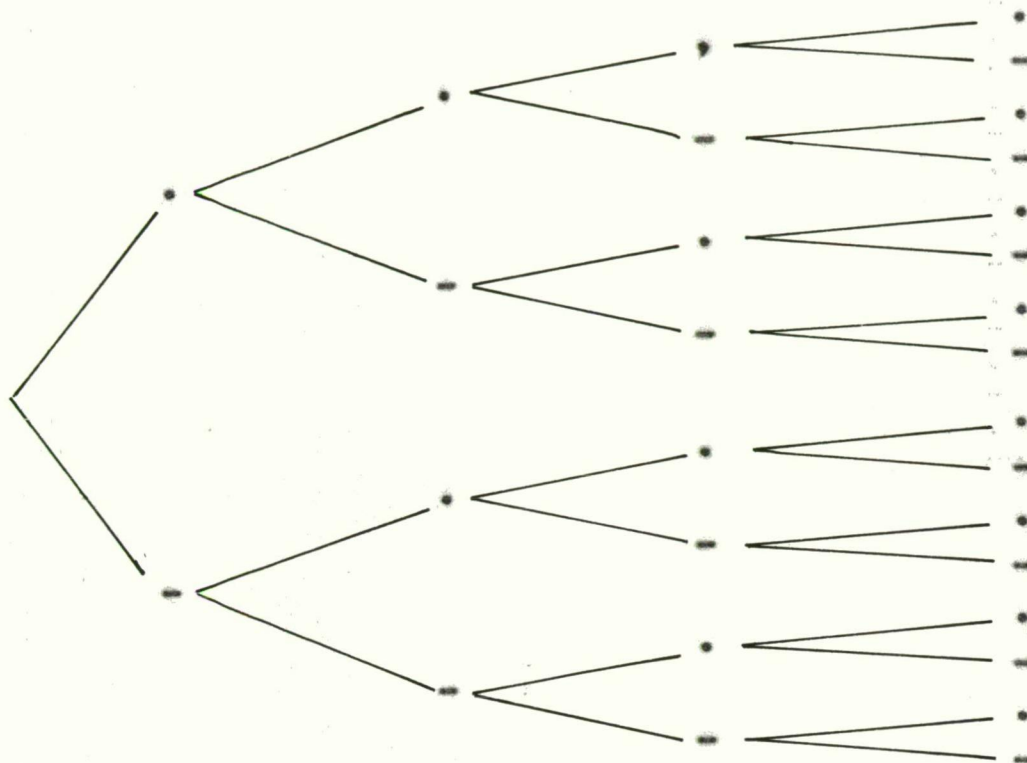
b/ kettő-,

c/ három-,

d/ négyjegyű jelsorozat /Morse/ állítható elő?"

- Összetett kombinatív művelet: az összes különböző /egy,
kettő, három, négy/ elemszámú ismétléses variációk kép-
zése.

- Ábrázolás: fa diagram /a négyjegyű jelsorozatról a többi
is leolvasható/



egyjegyű-,

kétjegyű-,

háromjegyű-,

négyjegyű jelsorozat

60. feladat

"Két számjegy /pl. 4,5/ felhasználásával hány különböző

a/ egyjegyű

b/ kétjegyű

c/ háromjegyű szám készíthető?

Sorold fel ezeket!

Mit gondolsz hány

négyjegyű

ötjegyű

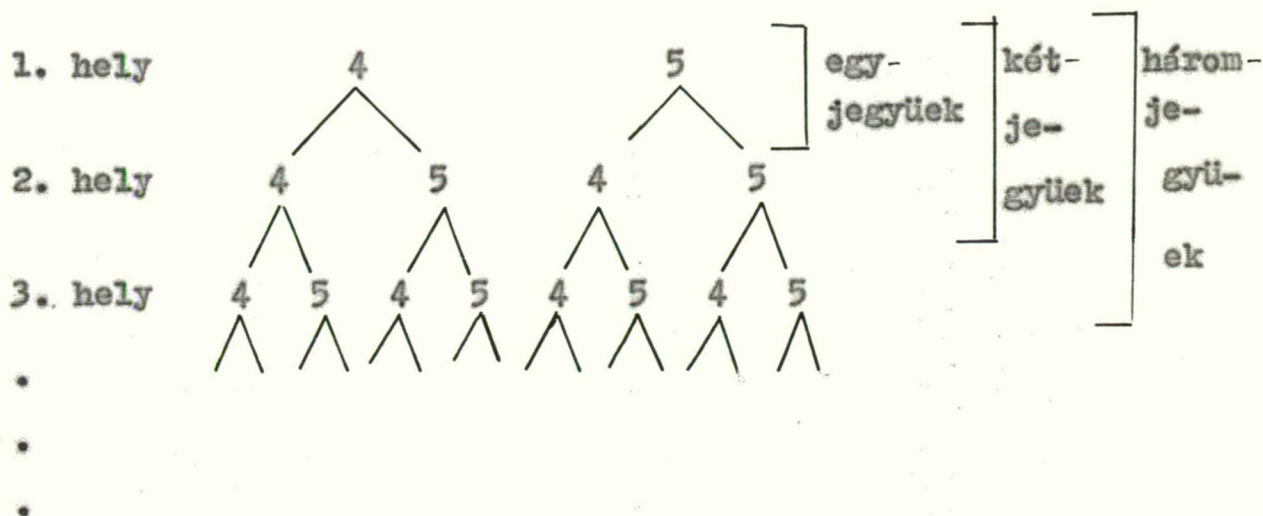
hatjegyű

nyolcjegyű

számot lehet képezni e két számjegy felhasználásával?

A sorozat folytatásával válaszolj a kérdésre!"

- Összetett kombinatív művelet: az összes ismétléses /1-8-ad rendű/ variációk képzése.
- Ábrázolása:
fa gráffal: leírható az összes konstrukció /itt helyhiány miatt nem tesszük/.
- A szereplő helyiértékek közül a legnagyobbbal kezdjük a leolvasást.
- A kapott konstrukciók száma és a felhasználható kiinduló elemszám közötti kapcsolat könnyen felismerhető
- Megjegyzés: a fa gráf elágazásai utalnak a konstrukciók számára, az érthetőség céljából adott számjegyek felhasználása nem feltétlenül szükséges.



b/ Változik a felhasználandó elemek száma, állandó hosszúságuk a létrehozandó konstrukciók:

56. feladat

"Mennyi az üdvözlő kézfogások száma 2,3,4,5,... tagu társaságban, ha mindenki mindenkivel kezét fog.

Rendezd sorozatba a kapott esetek számát!

A törvényszerűség felismerése után, a sorozat folytatásával válaszolj a kérdésre:

Hány üdvözlő kézfogás van

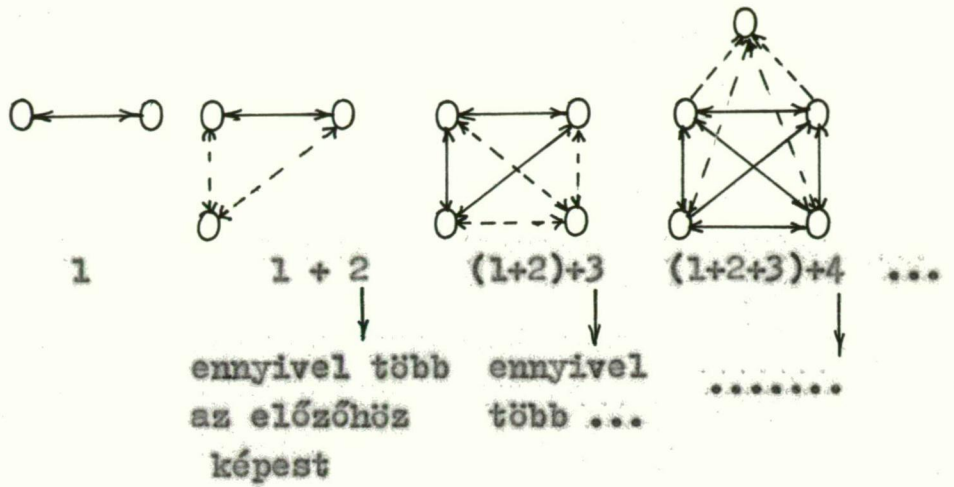
6, 7, 8, ... tagu társaságban?"

- Egyszerű kombinatorikus művelet: ismétlés nélküli kombinációk képzése.

- Ábrázolás: fa gráf és osztályozás

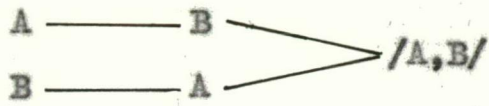
/Könnyebb áttekinthetőség érdekében jelöljük a társaság tagjait rendre A, B, C, D, E, ... betűvel/

kézfogás
száma

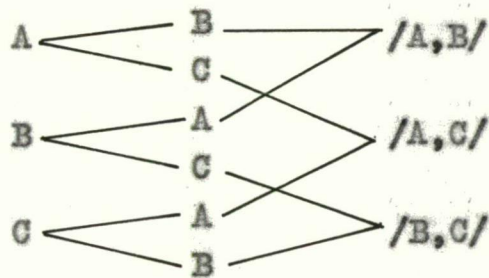


vagy:

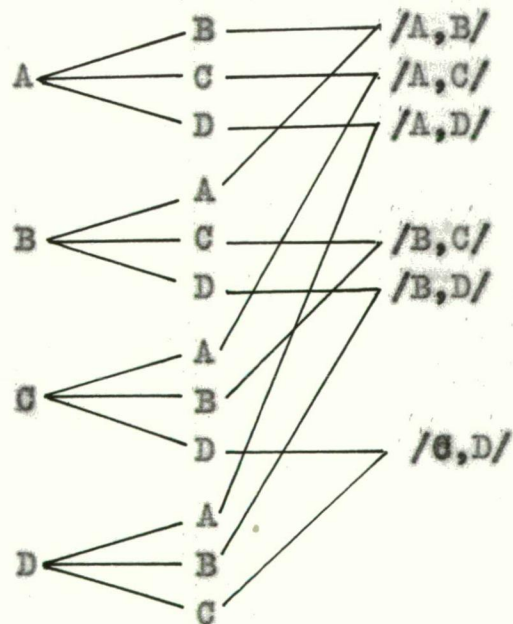
2 tagu társaság



3 tag



4 tag



.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

- Fontos észrevenni, hogy annyi nő a kézfogások száma, amennyi emberrel kell kezefogni az újabb embereknek, vagyis ahányan éppen voltak a változás előtt.

- Táblázat:

tanulók sz.	2	3	4	5	6	7	8	9
kézfogások száma	1	1+2	(1+2)+3	(1+2+3)+4	(1+2+3+4)+5	(1+2+3+4+5)+6		
	1	3	6	10	15	21	28	36
	2	3	4	5	6	7	8	

59. feladat

"Hány különböző kétjegyű szám készíthető, ha

a/ 1-féle számjegyet használhatsz: pl. 5

b/ 2-féle számjegyet használhatsz: pl. 5,8

c/ 3-féle számjegyet használhatsz: pl. 5,8,1

d/ 4-féle számjegyet használhatsz: pl. 5, 8, 1, 3 ?

Ird sorozatba a kapott kétjegyű számok számát, és folytasd a sorozatot 5, 6, 7, 8, 9-féle számjegy esetén!

/0 felhasználását most zárjuk ki!/"

- Elemi kombinatorik művelet: ismétléses variációk képzése.

- Ábrázolás: fa diagram

a/ 5

b/ 5 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \end{matrix}$

8 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \end{matrix}$

c/ 5 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \\ \quad \searrow 1 \end{matrix}$

8 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \\ \quad \searrow 1 \end{matrix}$

1 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \\ \quad \searrow 1 \end{matrix}$

d/

5 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \\ \quad \searrow 1 \\ \quad \searrow 3 \end{matrix}$

8 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \\ \quad \searrow 1 \\ \quad \searrow 3 \end{matrix}$

1 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \\ \quad \searrow 1 \\ \quad \searrow 3 \end{matrix}$

3 $\begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 8 \\ \quad \searrow 1 \\ \quad \searrow 3 \end{matrix}$

Táblázat:

számjegyek száma /n/	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
kétjegyű számok sz.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	...
		3	5	7	9	11	13

- Egyféle számjegy felhasználásával egyetlen kétjegyű szám készíthető.

A többi esetben a kétjegyű számok számát a megelőzőből az azokhoz felhasználható számjegyek számának kétszeresénél eggyel nagyobb szám $/2n+1/$ hozzáadásával nyerjük.

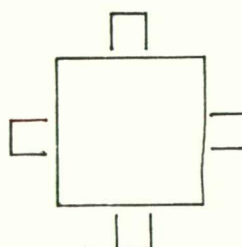
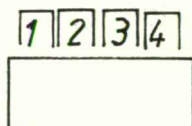
Ennek ill. a számjegyek száma és a belőlük képezhető - kétjegyű számok száma közötti összefüggés felismerése, a kiszámítási módot is sejteti.

- Megjegyzés: - a példaként adott számjegyek csak a feltétel megértését szolgálják
- a 0 kizárása fontos feltüntetett feltétel.

c/ Változatlan elemszám és konstrukcióhossz mellett a változó feltételek hatása a konstrukciók számára:

14. feladat

"Hányféleképpen ülhet egymás mellé Anna, Bella, Cili és Dóra
a/ egy négyülékes padban? b/ egy négyszögletes asztalnál?



/a székek nem
sorszámozottak!/"

- Elemi kombinatorik művelet: ismétlés nélküli permutációk képzése /a b/ esetben a lehetőségek számának osztásával nyerhető a különböző konstrukciók száma/
- Megjegyzés: A megváltozott feltétel miatt nincs kitüntetett szerepe az egyes helyeknek. Csak a helyek egymáshoz való kapcsolata a fontos. Ezért csökken a feltételek ilyen változtatásával a különböző konstrukciók száma az eredetinek a 6-od részére.

3. feladat

"Három gyerek áll sorba 1-1 szék előtt. Bármelyik leülhet / \square /
és bármelyik felállhat / $||$ /.

Jegyezd le a lehetséges eseteket! /Jelölés: \square , $||$ /

a/ Ha a székek nem sorszámozottak

b/ Ha a székek sorszámozottak."

- Egyszerű kombinatív művelet ismétléses variációk, majd
ismétlése nélküli variációk /ismétlés nélküli permutációk/
képzése.

- Elemzés:

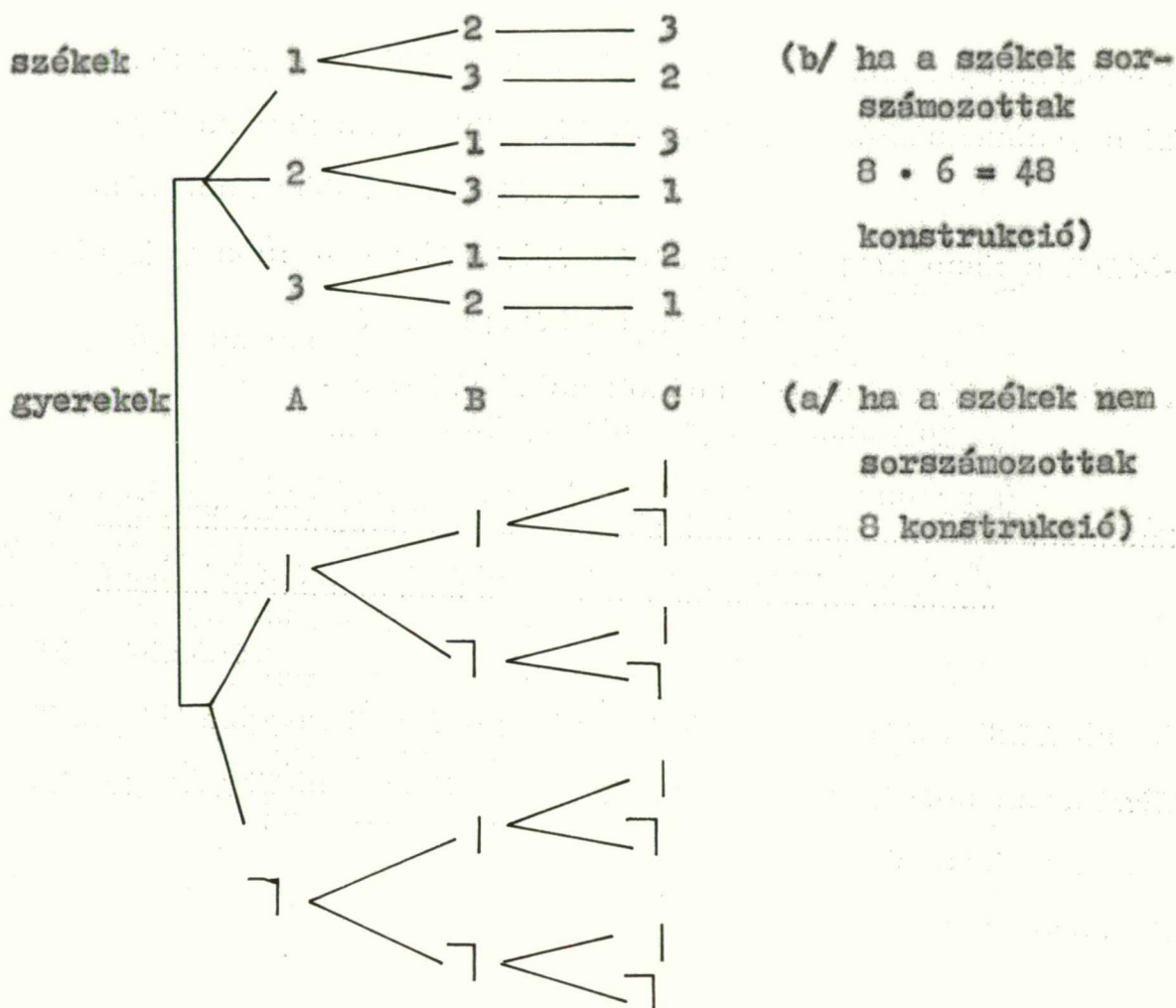
a/ ha a székek nem sorszámozottak, csak azt kell figye-
lembe venni, hogy melyik gyerek áll, illetve ül

b/ ha székek sorszámmal ellátottak, figyelembe kell ven-
ni az a/ esethez képest azt is, hogy a gyerek melyik
szék előtt áll, illetve ül.

Ez azt jelenti, hogy annyiszor több különböző eset
van, ahányféleképpen a szék különböző sorrendben le-
het egymás mellett.

- Ábrázolás:

/csak a b/-hez tartozó, erről az a/-hoz tartozó konst-
rukciók is leolvashatók/



3. A fejlesztési programban résztvevők bemutatása

Tolna megye 6 általános iskolájának egy-egy negyedik osztályában a feladatgyűjtemény felhasználásával történt a kombinatorika témakör tanítása, az 1983/84-es tanévben. Az iskolák és az osztályok kiválasztása reprezentatív mintavétel alapján történt. Két város /Szekszárd I. sz. és

Szekszárd Gyakorló Általános Iskola/, két nagyközség /Decs, Tolna/, két község /Mözs, Ócsény/ egy-egy iskolája vett részt a vizsgálatban.

Az adott osztályokban tanító pedagógusokkal folyamatos volt a munkakapcsolatunk. Rendszeres konzultációinkon megbeszéltük a fejlesztő program célját, a feladatok értelmezését, elemzési lehetőségeit, megoldását, ábrázolását. A feldolgozás során szerzett tapasztalataikról is rendszeresen adtak tájékoztatást. A tananyag feladattípusaihoz készített feladatok közül a választást a pedagógusokra bíztuk.

A feladatgyűjteményt a tanulói létszámnak megfelelő példányszámban biztosítottuk. A tanulói megoldások számára helyet hagyva lehetővé tettük a munkalapszerű használatot.

A tanulói feldolgozást tartalmazó feladatgyűjtemények egy későbbi vizsgálatnál felhasználhatók, hiszen a tanulói megoldások, a konstrukciók és felsorolásuk sorrendjének elemzése sok használható információt szolgáltat a kombinatív képességre vonatkozóan.

IV. A KOMBINATIV KÉPESSÉG EMPIRIKUS VIZSGÁLATA

1. A vizsgálat célja

A fejlesztő programnál említetteken túl vizsgálatunkat abból a célból végeztük, hogy tapasztalatokat szerezzünk az új tanterv hatásáról, a kombinativ képesség valamilyen szintű megjelenéséről, fejlesztetőségéről az alsó tagozat 4. osztályában.

A fejlesztés megkezdése előtt alapfelmérést végeztünk /I. mérés/ a kísérletben résztvevő iskolák egy-egy 4. osztályában 1983-ban a tanév végén.

A fejlesztés után, a következő tanév végén az összehasonlítás érdekében elvégeztük az ellenőrző mérést /II. mérés/ ugyanezen iskolák megfelelő 4. osztályaiban.

A 8. osztályos tanulók körében végzett vizsgálat más szempontú összehasonlíthatóság érdekében történt.

Mindhárom esetben ugyanazzal a feladatlappal történt a mérés.

2. A vizsgálati minta

A kombinativ képesség vizsgálatát Tolna megyében a reprezentativitás szempontjai szerinti kiválasztás alapján, hat

általános iskolában végeztük:

Szekszárd I. sz. Általános Iskola /ének-zene tagozatos/

Szekszárd Gyakorló Általános Iskola

Tolna II. sz. Általános Iskola

tolnai alsótagozat

mőzsi alsó tagozat

Decs Általános Iskola

Ócsény Általános Iskola

I. sz. mérés

Időpont: 1983. június

Résztvevők: 160 fő 4. osztályos tanuló

II. sz. mérés

Időpont: 1984. június

Résztvevők: 171 fő 4. osztályos tanuló, akik a kombinatórika témát a fejlesztési program alapján dolgozták fel.

III. sz. mérés

Időpont: 1984. június

Résztvevők: 130 fő 8. osztályos tanuló.

Az egyes mérésekhez tartozó mintavétel elegendő számú adatot szolgáltatott az elemzéshez mérési céljaink érdekében. A már ismerttetett, tantervi keretek között működő fejlesztő kísérletet ugyanezen iskolák negyedik osztályaiban végeztük

1983 szeptemberétől, így a feltételek azonosak voltak. A spontán fejlődés /Csongrád megye/ és az új tanterven alapuló fejlődés /Tolna megye/ eredményét jellemző adatokat közel azonos létszámú minta szolgáltatja.

A feladatlapot önállóan minden külső segítség nélkül oldották meg a tanulók. Csupán az utasítások felolvasását végeztük, miközben a tanulók követték saját feladatlapjukon a szöveget. Ezt azért tartottuk fontosnak, mert így az aránylag terjedelmes bevezető utasítások megértését könnyítettük és csökkentettük az elolvasáshoz felhasználandó időt. A mérést az osztály tanítója jelenlétében végeztük. A kidolgozásra egy tanórát biztosítottunk, amely időtartama tapasztalatok alapján összességében elegendőnek bizonyult. A tanulók nagy része az adott időintervallumon jóval belül készült el a munkával. Azoknál a tanulóknál, akik nem oldották meg a feladatokat, nem az időhiány okozta a sikertelenséget.

3. A v i z s g á l a t i e s z k ö z

3.1. A feladatok rendszere

A gondolkodás műveleti képességeinek vizsgálatához az előzőekben ismertetett elméleti koncepció alapján elkészített tesztrendszerrel, kiterjedt empirikus vizsgálatot végeztek a kutatók.

A vizsgálat Csongrád megyében 14 éves /600 fő/ 11 éves /150 fő/ és 17 éves /150 fő/ tanulók körében történt, a rendszerezési, a kombinatív, és a logikai műveleti képesség struktúrájának és a fejlődés folyamatának tanulmányozására.

Mivel Tolna megyében az új matematika tanterv szerint tanulók esetében vizsgáljuk a kombinatív műveletek fejlettségét, és felhasználjuk a kutatás feladatrendszerét, ebből válogatva - későbbi indoklás alapján - feladatokat, ezért a tesztrendszernek az idevonatkozó részét szükséges általánosan bemutatni.

A kombinatív képesség vizsgálatához a tesztek összeállítására a kombinatív műveletek feltételezett rendszereződése /8 feladattípus/, az absztrakciós szintek és a szabályozási szintek figyelembevételével történt.

A tesztek csak habituális szintre vonatkozóan dolgozták ki. Ismeretes, hogy habituális szabályozásról rutinszerűen végzett tevékenységeinkkel kapcsolatban beszélünk, amikor a tevékenységben a "belső környezetből" a tanult struktúra dominál a tevékenység szabályozásában. Vagyis, amikor az adott művelet működik, de nincs tudomásunk róla, illetve nem tudjuk hogyan csináljuk. /Nagy 1980, 1983./

A tevékenység tárgya szerinti különbözőség figyelembevétele miatt a tesztek három különböző szintre vonatkozóan készítették el: manipulatív, szenzoros, illetve formális szint.

A manipulativ szintnél színes pálcikákból, vagy lapákból tényleges megalkotással, szenzoros szintnél kis ábrákon jelölték be, formális szinten betűkből, számokból, jelekből hozták létre a feltételeknek megfelelő összes konstrukciót. A feladatok tehát csak tartalom szempontjából különböznek, matematikai szempontból nem.

Az ismertetett nyolc feladattípus mindegyikére több /3-6/ feladat vonatkozik, lényegében mindegyikhez egy szubteszt tartozik. E feladatok mindegyikének három számszerű jellemzője van: a kiinduló elemek száma, az elkészítendő konstrukciók elemeinek száma, a lehetséges konstrukciók száma.

3.2. A feladatlapok és megoldásuk

A nagyméretű kutató munka feldolgozó része során kiderült, hogy "bár az egyes szinteken belül az adatok között nagy különbségek vannak, a különböző szinteken értékeik hasonló tendencia szerint változnak". "Azonos strukturájú feladataink megoldásában például alig jelent különbséget, hogy a feladatot manipulativ, szenzoros vagy formális tartalommal ágyaztuk." /Csapó, 1985. 30. old./ Megállapítható volt az is, hogy külön rendszernek bizonyult a kétváltozós konstrukciók létrehozása. "Először a két elemből álló konstrukciók, a párok képzésére alakulnak ki a műveletek." /Csapó 1983. 47. old./

A vizsgálat tapasztalatait, eredményeit figyelembe véve az új matematika tanterv szerint tanuló alsótagozatos tanulók kombinatív műveleti képességének vizsgálatához a formális szintre készített "Variálás és a "Kombinálás" tesztet használtuk fel.

A felhasználás oly módon történt, hogy a nyolc feladattípus feladatai közül csak a kételemű konstrukciók létrehozására vonatkozó feladatokkal végeztük a vizsgálatot. Ennek alapján összesen 16 feladatot választottunk ki az alapkutatás feladatrendszeréből, így a Descartes-féle szorzatok, az ismétlés nélküli variációk, az ismétléses variációk, az ismétlés nélküli kombinációk, az ismétléses kombinációk képzését vizsgáltuk formális szinten. A feladatokat kis betűkkel jelöltük, a későbbiekben e jelek és a tesztlap-elnevezések /"Variálás, "Kombinálás"/ felhasználásával hivatkozunk az egyes feladatokra.

Minden esetben megoldásként a feltételeknek megfelelő konstrukciók megalkotását, az összes lehetséges konstrukciók felsorolását kértük. A feladatok jellemzési adatai az alábbi táblázatokból /1. táblázat, 2. táblázat/ kiolvashatók, ahol a vizsgált feladattípus, a kiinduló, /felhasználható/ elemek és számuk, az elkészítendő konstrukciók, illetve hosszuk és számuk megtalálható.

" V A R I Á L Á S " teszt feladatai

Feladat		Kiinduló elemek		Konstrukciók		
neve	jele	száma	jele	hossza	száma	felsorolása
ismét- lés nélküli vari- áció képz.	a	3	(A,B,C)	2	6	AB, AC BA, BC CA, CB
	b	4	(A,B,C,D)	2	12	AB, AC, AD, BA, BC, BD CA, CB, CD DA, DB, DC
	c	5	(A,B,C,D,E)	2	20	AB, AC, AD, AE BA, BC, BD, BE CA, CB, CD, CE DA, DB, DC, DE EA, EB, EC, ED
ismét- léses vari- áció képz.	d	2	(A,B)	2	4	AA, AB BA, BB
	e	3	(A,B,C)	2	9	AA, AB, AC BA, BB, BC CA, CB, CC
	f	4	(A,B,C,D)	2	16	AA, AB, AC, AD BA, BB, BC, BD CA, CB, CC, CD DA, DB, DC, DD
D-féle szor- zat	g	2+2	(A,B) (1,2)	2	4	A1, A2 B1, B2
	h	3+2	(A,B,C) (1,2)	2	6	A1, A2 B1, B2 C1, C2
	i	4+3	(A,B,C,D) (1,2,3)	2	12	A1, A2, A3 B1, B2, B3 C1, C2, C3 D1, D2, D3
	j	5+2	(A,B,C,D,E,F) (1,2)	2	12	A1, A2 B1, B2 C1, C2 D1, D2 E1, E2 F1, F2

" K O M B I N Á L Á S " teszt feladatai

Feladat		Kiinduló elemek		Konstrukciók		
neve	jele	száma	jele	hossza	száma	felsorolása
ism.	a	3	(A,B,C)	2	3	AB, AC, BC
nélk.	b	4	(A,B,C,D)	2	6	AB, AC, AD BC, BD CD
biné- ciók képz.	c	5	(A,B,C,D,E)	2	10	AB, AC, AD, AE BC, BD, BE CD, CE DE
ismét-	d	2	(A,B)	2	3	AA, AB
léses	e	3	(A,B,C)	2	6	AA, AB, AC BB, BC CC
kombi- nációk képzé- se	f	4	(A,B,C,D)	2	10	AA, AB, AC, AD BB, BC, BD CC, CD DD

2. táblázat

Megjegyzés: természetesen a más formában /fordított sorrendben/
felírt jó és szükséges konstrukciókat is elfogadtuk.

A szöveges utasítással megfogalmazott feladatokat a "Variálás" és a "Kombinálás" tesztlapok tartalmazzák. A mérőlapok eredeti szövegét nem változtattuk meg annak ellenére, hogy minden esetben két elemű konstrukciók létrehozása volt a feladat. Az egy-egy feladattipushoz tartozó utasítás változatlan megfogalmazása biztosította, hogy az összehasonlító elemzés /Csongrád megye - Tolna megye/ alapját szolgáló adatokat, azonos felépítésű, megfogalmazású tesztek segítségével nyerjük.

A fontos feltételeket aláhúzással, ezenbelül a konstrukciók hosszára vonatkozó utasítást nagybetűs írásmóddal emeltük ki.

A tesztlapok és megoldásuk / a számítógépes értékeléshez szükséges kódszámokkal együtt/:

Név: Idő: VARIÁLÁS

A következő feladatokban mindig betűkből kell betűsorokat összeállítani és az összes különböző összeállítási lehetőséget meg kell keresni. Mindegyik feladatban meg van határozva, hogy milyen betűket használhatsz fel, hogy hány betűből álló betűsort kell létrehozni, és az is, hogy egy betűsorban ugyanaz a betű csak egyszer fordulhat elő, vagy többször szerepelhet. Figyelmesen olvasd el a feladatok szövegét, és sorold fel az összes különböző, a feladatban megadott feltételeknek megfelelő összeállítást!

Először olyan feladatokkal találkozod, amelyeknél egy-egy betűsorban nem szerepelhetnek azonos betűk, vagyis egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia.

- a/ Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia!
Felhasználható betűk: A, B, C

AB (1)	BA (3)	CA (5)
AC (2)	BC (4)	CB (6)

- b/ Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia!
Felhasználható betűk: A, B, C, D.

AB (1)	BA (4)	CA (7)	DA (10)
AC (2)	BC (5)	CB (8)	DB (11)
AD (3)	BD (6)	CD (9)	DC (12)

- c/ Sorold fel az összes különböző KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia!
Felhasználható betűk: A, B, C, D, E.

AB (1)	BA (5)	CA (9)	DA (13)	EA (17)
AC (2)	BC (6)	CB (10)	DB (14)	EB (18)
AD (3)	BD (7)	CD (11)	DC (15)	EC (19)
AE (4)	BE (8)	CE (12)	DE (16)	ED (20)

A következő feladatoknál egy-egy betűsorban ugyanaz a betű többször is előfordulhat, vagyis egy betű egy betűsorban bármennyiszer felhasználhatsz.

- d/ Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsorban azonos betűk is szerepelhetnek!
Felhasználható betűk: A, B.

AA (1)	BA (3)
AB (2)	BB (4)

- e/ Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsorban azonos betűk is szerepelhetnek!
Felhasználható betűk: A, B, C.

AA (1)	BA (4)	CA (7)
AB (2)	BB (5)	CB (8)
AC (3)	BC (6)	CC (9)

f/ Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsorban azonos betűk is szerepelhetnek!
Felhasználható betűk: A, B, C, D.

AA (1)	BA (5)	CA (9)	DA (13)
AB (2)	BB (6)	CB (10)	DB (14)
AC (3)	BC (7)	CC (11)	DC (15)
AD (4)	BD (8)	CD (12)	DD (16)

A következő feladatokban betűkből, számokból és más jelekből kell az autók rendszámtábláihoz hasonló sorozatokat összeállítani. Mindegyik feladatban meg van határozva, hogy a sorozat melyik helyére mit lehet felhasználni. Mindig az összes lehetséges sorozatot kell előállítani.

g/ Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!

A1 (1)	B1 (3)
A2 (2)	B2 (4)

h/ Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B vagy a C betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!

A1 (1)	B1 (3)	C1 (5)
A2 (2)	B2 (4)	C2 (6)

i/ Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B vagy a C vagy a D betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 vagy a 3 számjegyet teheted!

A1 (1)	B1 (4)	C1 (7)	D1 (10)
A2 (2)	B2 (5)	C2 (8)	D2 (11)
A3 (3)	B3 (6)	C3 (9)	D3 (12)

j/ Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B vagy a C vagy a D vagy az E vagy az F betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!

A1 (1)	B1 (3)	C1 (5)	D1 (7)	E1 (9)	F1 (11)
A2 (2)	B2 (4)	C2 (6)	D2 (8)	E2 (10)	F2 (12)

Név: Idő:

KOMBINÁLÁS

A következő feladatokban betűkből kell valamilyen összeállításokat csinálni. Mindig meg van határozva, hogy milyen módon kell az összeállításokat elkészíteni, és meg kell találni a feltételeknek megfelelő összes különböző megoldást! Vigyázz, hogy mindig azt csináld, amit a feladat előír! Különösen ügyelj arra, hogy milyen szempontok alapján tekintjük az összeállításokat különbözőeknek vagy egyformáknak, számít-e a betűk sorrendje vagy sem! Figyelmesen olvasd el a feladatok szövegét és sorold fel a feltételeknek megfelelő összes különböző megoldást!

A következő feladatokban megadott betűkből kell meghatározott számút kiválasztani és belőlük csoportokat összeállítani. Ezekben a feladatokban nem számít a betűk sorrendje, mindegy, hogy azokat milyen sorrendben írod le. Ha tehát két összeállításban pontosan ugyanolyan betűk szerepelnek és csak a betűk sorrendje különböző, akkor azokat egyformának tekintjük. Vigyázz, hogy csak csupa különböző összeállítást csinálj, ne állíts elő több olyat is, amelyik egyformának számít! Ugyanazt a betűt egy összeállításban belül csak egyszer használhatod fel, vagyis egy-egy összeállításnak csupa különböző betűkből kell állnia! Ha több egyformának számító összeállítást is felírsz, a feleslegeseket húzd át, vigyázz, hogy csak csupa különböző maradjon!

a/ Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B és a C betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

AB (1) AC (2) BC (3)

b/ Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B, a C és a D betűket használhatod fel és ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

AB (1) BC (4) CD (6)
AC (2) BD (5)
AD (3)

c/ Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B, a C, a D és az E betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

AB (1) BC (5) CD (8) DE (10)
AC (2) BD (6) CE (9)
AD (3) BE (7)
AE (4)

A következő feladatokban megadott betűkből kell meghatározott számú betűt kiválasztani, és belőlük csoportokat összeállítani. Ugyanazt a betűt egy-egy összeállításban többször is felhasználhatod, vagyis az összeállításokon belül azonos betűk is szerepelhetnek. Az összeállításokban nem számít a betűk sorrendje, mindegy, hogy azokat milyen sorrendben irod le. Ha tehát két összeállításban pontosan ugyanolyan betűk szerepelnek, és csak a betűk sorrendje különböző, akkor a két összeállítást egyformának tekintjük. Ha több egyformának számító összeállítást is felírsz, a feleslegeseket húzd át, vigyázz, hogy csak csupa különböző maradjon!

d/ Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A és a B betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

AA (1)	BB (3)
AB (2)	

e/ Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B és a C betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

AA (1)	BB (4)	CC (6)
AB (2)	BC (5)	
AC (3)		

f/ Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B a C és a D betűket használhatod fel és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

AA (1)	BB (5)	CC (8)	DD (10)
AB (2)	BC (6)	CD (9)	
AC (3)	BD (7)		
AD (4)			

3.3. A megoldások feldolgozása

A számítógépes értékeléshez szükség volt egy célszerű jelsorra minden tanuló esetében, minden egyes feladatmegoldás jelölésére. Ezt úgy nyertük, hogy a feladatok minden jó konstrukciójához egy kódszámot rendeltünk. Ezáltal minden feladat megoldása e kódszámokból nyert jelsorral jellemezhető. E kódszámokból nyert jelsor illetve elemei megmutatják, hogy milyen konstrukciókat és milyen sorrendben soroltak fel feladatonként az egyes tanulók. Ez utóbbi utal a különböző megoldási stratégiákra illetve ennek hiányára, ha a próbálkozás, a találgatás módszerét látjuk alkalmazni a rendszertelen felsorolások mögött.

A megoldásmenetek szerinti csoportosítás illetve az azonos módon megoldók száma utal a tanulók gondolkodási folyamataira, így a művelési képességek fejlettségére.

4. A m é r é s e r e d m é n y e i

4.1. Alapvető statisztikai jellemzők

A számítógépes feldolgozáshoz a kutatóknak statisztikai mutatókat kellett keresni a teljesítmények tömörebb kifejezésére.

A feladatok megoldásának jellemzésére konstruált mennyiségi mutató, az un. jósági mutató:

$$J = \frac{x - y}{T}$$

ahol x : a tanulói megoldásban szereplő jó és szükséges konstrukciók száma

y : a tanulói megoldásban szereplő jó de felesleges /ismétlődő/ konstrukciók száma

T : a teljes megoldáshoz tartozó különböző konstrukciók száma

A formula kielégíti az alábbi követelményeket:

- $0 \leq J \leq 1$ /ha kikötjük, hogy $y > T$ esetén $J = 0$
- az elkészített jó és szükséges konstrukciók számának függvényében növekszik
- az elkészített jó, de a feladat feltételei szerint nem különböző, tehát ismétlődő, felesleges konstrukciók számának növekedésével csökken.

Ezáltal ez a mennyiségi mutató alkalmas mindenféle feladatmegoldás mennyiségi jellemzésére.

A feladat nehézségét illetve összetettségét jellemző súlyozott mutató, a súlyozott mérték:

$$S = J \cdot T$$

Nyilvánvaló, hogy $S_{\max} = T$, vagyis a feladathoz maximálisan készíthető különböző jó konstrukciók számával, mert ebben az esetben $J = 1$

A feladatok megoldásának statisztikai jellemzői:

\bar{x} : a jó konstrukciók számának átlaga

CV_x : a jó konstrukciók számának relatív szórása

\bar{y} : az ismétlődő konstrukciók számának átlaga

CV_y : az ismétlődő konstrukciók számának relatív szórása

\bar{J} : a megoldás jóságának jellemzésére szolgáló mutató átlaga

CV_J : a feladát megoldása jóságának relatív szórása

$100 \bar{J}$: a megoldás jóságának jellemzésére szolgáló mutató átlagának 100-szorosa, tehát megoldásának jósága %-ban

$S = \bar{J} \cdot T$: a J átlaga a teljes megoldás konstrukcióinak számával szorozva

CV_{JT} : a $J \cdot T$ mennyiség relatív szórása, amely természetesen J -nek illetve a $100 J$ -nek is relatív szórása

A mérési eredményeket táblázatba foglalva, oszloponként, soronként összehasonlítva, vizsgálhatjuk az egyes feladatok mennyiségi mutatóit.

A jó konstrukciók számának átlagát \bar{x} / összehasonlíthatjuk az egyes feladatokhoz tartozó teljes megoldást adó értékkel $/T = x_{\max}/$. Látható, hogy a lehetséges maximumot mennyire közelíti meg a tényleges megoldásként adódó jó konstrukciók átlaga.

A jó konstrukciók számának átlagértéke arról nem nyújt információt, hogy ez az átlag milyen statisztikai sor eredménye, milyen értékekből tevődik össze ez az átlagérték, milyen a jó konstrukciók számának szóródása. Ezért a táblázatban feltüntettük a jó konstrukciók számának relatív szórását /variációs koefficiensét/ $/CV_x/$.

Az ismétlődő konstrukciók számának átlaga $/\bar{y}/$ összehasonlítható a jó konstrukciók számának átlagával illetve nagyságát figyelve viszonyíthatunk a lehetséges minimumhoz $/y = 0/$. Az ismétlődő konstrukciók számának relatív szórásértéke $/CV_y/$ utal arra, hogy milyen mértékű ezen adatok szóródása az adott átlaghoz $/\bar{y}/$ képest.

Önmagában a jó konstrukciók átlaga $/\bar{x}/$ nem utal arra, hogy jó konstrukciók mellett előfordult-e ismétlődés, vagy csak jó konstrukciók, de nem teljes megoldás eredménye a kapott érték. A felesleges konstrukciók jelenlétének mértékét jelzi az \bar{x} és a \bar{JT} értékek eltérésének nagysága, hiszen a $JT = \frac{x}{T} \frac{T-y}{T}$ formulát felhasználva, belátható, hogy

$$JT \leq \bar{x} \quad / 0 \leq J \leq 1 /$$

$$/ T = x_{\max} /$$

Ha a konstrukciók között egyetlen felesleges konstrukció sincs, vagyis $\bar{y} = 0$, akkor $\bar{JT} = \bar{x}$

Ha van a konstrukciók között ismétlődő, felesleges, akkor $\bar{JT} < \bar{x}$. Nyilvánvaló annál nagyobb a két érték között az eltérés mértéke, minél több a felesleges konstrukciók száma.

Mivel T az összes lehetséges konstrukció számát, vagyis egy-egy feladat teljes megoldását jelöli, nagysága jellemzi, az adott feladatok súlyát. Ezért a $J \cdot T$ mennyiség felhasználható a szubtesztek, tesztek mennyiségi jellemzőihez.

A feladat megoldásának jóságát százalékban kifejezett érték $/100 \bar{J}/$, a feladatok egymással történő összehasonlítását is lehetővé teszi.

Ahhoz, hogy az egyes megoldások jóságának átlagértéke \bar{J} milyen jóságértékek "eredménye", hogy mennyire kiegyenlített értékekről van szó, erről ad információt a jóságmutatók relatív szórásértéke $/CV_J \%$, ami $J \cdot T$ illetve a $100 \bar{J}$ -nek is relatív szórása.

A művelési képesség kialakultságának mértékét jellemezhetjük azon tanulók arányával, akik az adott feladatot hibátlanul oldották meg, tehát akik megoldásának jósága $1 / J = 1/$.

4.2. A mérési eredmények elemzése

Az ismertetett mennyiségi mutatók és felhasználási lehetőségeik alapján megfogalmazhatjuk a kombinatív képesség fejlettségére vonatkozó észrevételeinket. A feladatok megoldásában nyújtott tanulói teljesítmények adatait a 3. sz. és a 4. sz. táblázatok tartalmazzák. Az összehasonlítás cél-

jából a Csongrád megyében végzett, a spontán fejlődést vizsgáló felmérés idevonatkozó adatait is bemutatjuk /3. sz. táblázat/. A 4. sz. táblázat az új tanterv szerint tanulók mérési eredményeit tartalmazza:

- I. mérés: 4. oszt. tanulók - kontroll csoport /1983/
- II. mérés: 4. oszt. tanulók - fejlesztett csoport /1984/
- III. mérés: 8. oszt. tanulók /1984/

Az 5. sz. táblázatban a feladatok közötti korrelációs együtthetők bizonyos részmatrixai láthatók. A korrelációs együtthetők meghatározásához a megoldás jóságát jellemző mutatót /JT/ használtuk. /Helykimélés céljából a 0-t és a tizedesvesszőt elhagytuk./

Az 5. ábrán a teljesítmények eloszlását mutatjuk be.

Elemzéseinket az I. és a II. mérés adatai alapján végezzük. A III. mérés eredményeivel való összehasonlítás egy későbbi munkánkban szerepel.

Tanulói teljesítmények
"Variálás" teszt

T	10 évesek					14 évesek					17 évesek							
	\bar{x}	CV _x	\bar{JT}	CV _J	100 \bar{J} J=1	%	\bar{x}	CV _x	\bar{JT}	CV _J	100 \bar{J} J=1	%	\bar{x}	CV _x	\bar{JT}	CV _J	100 \bar{J} J=1	%
a	6	4,22	52	4,19	70	49,1	4,58	41	4,55	42	76	55,4	4,60	33	4,58	33	76	49,6
b	12	7,66	63	6,83	57	29,1	8,58	47	8,48	48	70	44,6	9,94	39	9,6	42	80	40,3
c	20	14,34	51	13,70	69	34,5	14,00	48	13,92	48	69	40,3	14,45	40	14,10	43	71	39,0
d	4	3,0	43	2,91	73	51,8	3,52	27	3,51	28	87	74,1	3,56	19	3,52	22	88	64,7
e	9	5,35	66	5,28	59	31,8	6,74	47	6,69	47	75	52,2	7,31	32	7,27	32	81	52,5
f	16	10,05	61	9,69	61	10,0	11,85	43	11,77	43	73	43,1	12,71	30	12,51	31	78	4,2
g	4	2,35	81	2,31	58	54,5	2,90	61	2,87	62	72	70,1	3,31	44	3,31	45	83	81,5
h	6	3,4	82	3,28	55	46,4	4,30	62	4,27	63	71	69,5	5,05	43	5,04	43	84	81,5
i	12	6,65	84	6,04	50	37,3	8,10	65	8,10	66	67	58,4	10,35	39	10,28	40	86	79,0
j	12	7,08	75	6,67	56	41,8	9,10	53	9,06	54	75	67,2	10,55	35	10,52	36	88	81,5
"Kombinálás" teszt																		
a	3	2,34	52	0,46	220	11,8	2,46	46	1,24	112	41	35,3	2,57	40	1,23	118	41	37,5
b	6	5,23	31	1,32	165	12,6	5,03	36	2,60	98	43	27,6	5,16	34	2,41	112	40	26,7
c	10	8,75	30	3,55	84	12,6	7,97	39	5,01	72	50	25,0	8,54	35	4,78	80	48	24,2
d	3	2,67	29	2,08	43	35,5	2,70	29	2,10	38	71	28,8	2,70	26	2,09	37	69	29,5
e	6	4,41	45	3,29	62	23,9	4,94	37	3,53	54	58	28,7	5,18	28	3,72	52	62	35,2
f	10	6,76	54	4,59	73	16,7	7,76	41	5,69	58	57	22,8	8,45	33	5,77	59	58	30,3

3. táblázat

Tanulói teljesítmények

"Variálás" teszt

T	I. mérés /4.o./						II. mérés /4.o./ /fejlesztett csoport/						III. mérés /8.o./					
	\bar{x}	CV %	\bar{J}_T	CV %	$100 \bar{J}$	J=1 %	\bar{x}	CV %	\bar{J}_T	CV %	$100 \bar{J}$	J=1 %	\bar{x}	CV %	\bar{J}_T	CV %	$100 \bar{J}$	J=1 %
a 6	5,21	31	5,13	32	85,5	71,3	5,61	20	5,52	22,0	92,0	86	5,80	18	5,75	16,2	95,9	94,0
b 12	9,48	39	9,38	39	78,2	58,8	10,62	24	10,56	24,6	88,0	77,2	11,42	19	11,25	18,2	93,7	87,0
c 20	15,23	43	15,04	43	75,2	56,9	17,55	24	17,39	25,1	87,0	67,3	18,35	23	18,1	21,6	90,5	77,0
d 4	3,31	36	3,29	36	82,3	70,6	3,67	21	3,64	23,7	91,2	86,6	3,89	16	3,83	15,4	96,0	93,0
e 9	6,81	43	6,73	44	74,8	51,8	7,84	28	7,77	29,2	86,3	74,3	8,50	18	8,35	17,4	92,7	82,0
f 16	11,33	49	11,19	50	70,0	50	13,30	32	13,17	33,5	82,3	57,3	14,69	22	14,48	21,4	90,5	77,0
g 4	3,17	46	3,14	48	78,5	72,5	3,52	34	3,48	35,8	87,0	83,6	3,89	20	3,85	19,1	96,3	96,0
h 6	4,61	51	4,55	52	75,9	68,7	5,30	33	5,24	34,4	87,4	83,6	5,83	20	5,74	18,8	95,8	96,0
i 12	8,59	54	8,49	55	70,6	56,3	10,02	37	9,98	38,0	83,2	73,7	11,23	24	11,11	22,9	92,6	87,0
j 12	8,98	51	8,92	51	74,3	61,9	9,99	38	9,92	39,2	82,7	69	11,27	20	11,19	19,8	93,3	79,0
"Kombinálás" teszt																		
a 3	2,55	33	1,95	53	65,3	46,3	2,90	15	2,60	30,6	87,0	79,0	2,93	9	2,71	24,2	90,3	80,0
b 6	4,51	36	3,72	49	62,0	26,8	5,38	19	4,99	30,5	83,2	63,2	5,56	14	5,19	25,2	86,6	66,0
c 10	7,15	41	6,2	49	62,0	25	8,70	26	8,29	30,3	82,9	57,9	9,13	18	8,72	22,6	87,2	59,0
d 3	2,31	41	1,99	49	66,5	39,4	2,57	36	2,40	41,5	80,2	69	2,84	19	2,68	24,3	89,6	76,0
e 6	4,41	40	3,74	51	62,3	27,5	5,10	29	4,65	37,7	77,6	54,4	5,51	20	5,14	28,5	85,8	64,0
f 10	6,38	42	5,94	51	59,4	21,9	8,20	28	7,60	35,7	76	42,1	8,73	23	8,09	30,8	81,0	52,0

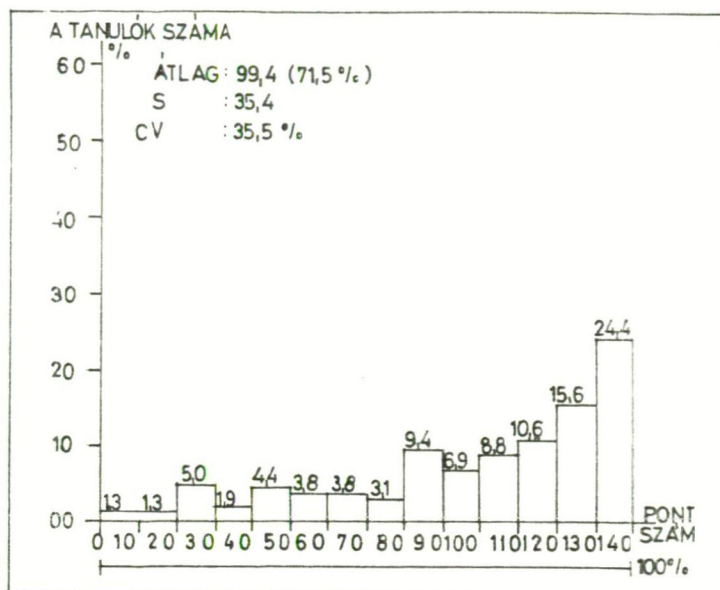
I. mérés

II. mérés

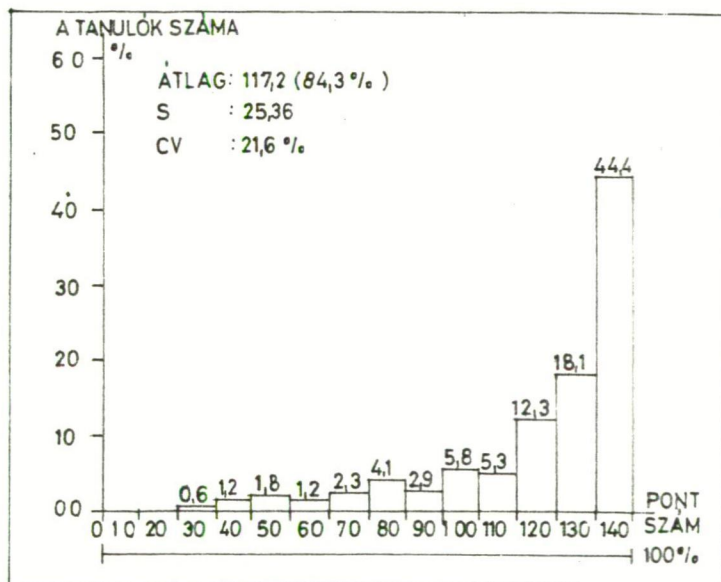
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	b	a	b
	b 79		b 64	
	c 70	85	c 65	83
Ismétléses variációk képzése	d	e	d	e
	e 71		e 64	
	f 63	90	f 50	79
Descartes- féle szor- zatok kép- zése	g	h i	g	h i
	h 90		h 80	
	i 81	90	i 76	91
	j 92	92 91	j 78	80 91
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	b	a	b
	b 79		b 69	
	c 70	86	c 60	71
Ismétléses kombinációk képzése	d	e	d	e
	e 69		e 72	
	f 70	87	f 67	84

5. táblázat

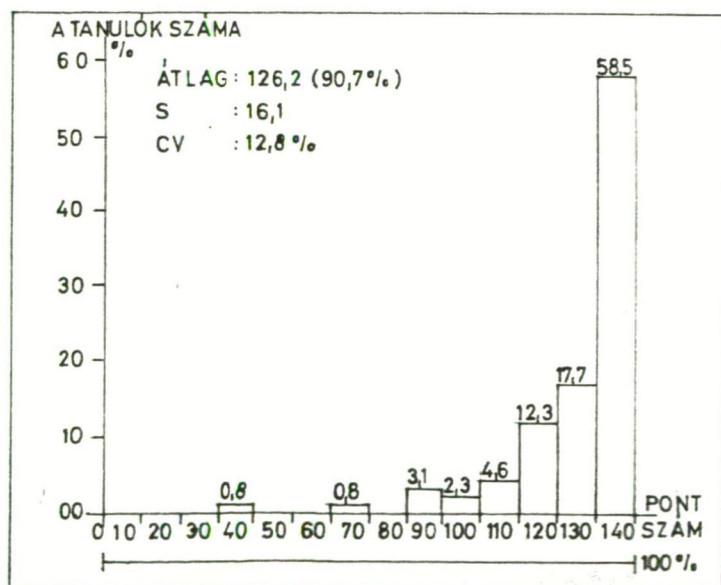
ÖSSZPONTSZÁM



I. MÉRÉS



II. MÉRÉS



III. MÉRÉS

I. számú mérés eredményeinek értékelése

A feladatmegoldó teljesítményt vizsgálva szembetűnik, hogy a "Variálás" teszt feladatait eredményesebben oldották meg a tanulók, mint a "Kombinálás" teszt feladatait.

A feladatok megoldása jószágának %-ban kifejezett értékét $/100 \bar{J}/$ megvizsgálva látható, hogy a "Variálás" teszten a legalacsonyabb érték 70 %, a legmagasabb 85 %, és az értékek zöme a 75-80 % között található. A "Kombinálás" teszten ezek az értékek 60-66 % között vannak.

A $100 \bar{J}$ értékek átlaga tesztenként:

"Variálás" : 76,53 %

"Kombinálás" : 62,92 %

Az egyes szubteszteken belül, a $100 \bar{J}$ értéke a kiindulási elemszám, ill. a létrehozandó konstrukciók számának növelésével fokozatosan csökken.

Ha összehasonlítjuk az összes lehetséges különböző jó konstrukciók számát $/T = x_{\max}/$ a ténylegesen elkészített jó konstrukciók számának átlagával $/\bar{x}/$, azt tapasztaljuk, hogy a "Variálás" teszt összes különböző jó konstrukcióinak átlagosan 77,5 %-át, a "Kombinálás" tesztnél átlagosan 74,5 %-át elkészítették a tanulók.

Részletesen:

"Variálás" teszt

a: 87 %

b: 79 %

c: 76 %

d: 83 %

e: 76 %

f: 71 %

g: 79 %

h: 77 %

i: 72 %

j: 75 %

átlag: 77,5 %

"Kombinálás" teszt

a: 85 %

b: 75 %

c: 72 %

d: 77 %

e: 74 %

f: 64 %

átlag: 74,5 %

Ez önmagában semmi különbséget nem jelent a két teszt megoldási szintje között. A "Kombinálás" teszt feladatainak teljesítményszintje mégis lényegesen alacsonyabb, mert a hibátlan megoldások %-os arányában lényeges különbség van. Tekintve a táblázat megfelelő adatait, azon tanulók arányát, akiknek a feladatmegoldása J = 1-gyel jellemezhető, látható, hogy a "Variálás" teszt feladatait a tanulók 62 %-a a "Kombinálás" teszt feladatait a tanulók 31 %-a oldotta meg hibátlanul, vagyis pontosan a szükséges konstrukciókat sorolták fel, egyetlen ismételve. Láthatjuk, hogy a Descartes-féle szorzatnál van a legtöbb ilyen megoldás /65 %/. Az ismétléses kombinációknál a tanulóknak csak 30 %-a készített hibátlan felsorolást.

A $\bar{J}T$ és a megfelelő \bar{x} értékek között nagyobb az eltérés a "Kombinálás" teszt esetében. A "Variálás" tesztnél a $\bar{J}T$ az \bar{x} értékeknek rendre 98 %, 99 %, 99 %, 99 %, 99 %, 99 %, 99 %, 99 %, 99 %, 99 %-a míg a "Kombinálás" tesztnél ez az érték rendre 76 %, 82 %, 87 %, 86 %, 85 %, 93 %.

Az \bar{x} és a $\bar{J}T$ eltérésének mértéke azt jelzi, hogy a "Variálás" teszt feladatainak megoldása során igen kevés felesleges konstrukciót, míg a "Kombinálás" teszt megoldása során lényegesen több felesleges konstrukciót tüntettek fel. Még konkrétan igazolja ezt, az ismétlődő konstrukciók számának átlaga.

Az egyes variációs koeficiensek értékei jól illusztrálják az adatok szórásának mértékét, így következtethetünk a teljesítmények megoszlására illetve a műveletek fejlettségére.

A relatív szórásértékeket vizsgálva látható, hogy igen erős /31-54%/ szórás jellemző a "Kombinálás" teszt szinte mindegyik, a "Variálás" teszt némely feladatára. Ez arra enged következtetni, hogy jelentősen eltérő számú jó konstrukciót alkotnak a tanulók, vagyis a nagy részük vagy minden lehetséges jó konstrukciót felsorol, vagy csak néhányat. Ez leginkább a Descartes-féle szorzatnak megfelelő konstrukcióképzésre jellemző.

Ha az egyes feladatcsoportokat vizsgáljuk a feladatmegoldás jóságának %-ban kifejezett értéke szerint $/100 \bar{J}/$, azt tapasztaljuk, hogy az ismétlés nélküli variációk képzése 80 %-os átlagértékkel képviseli a legjobb teljesítményt, ezt követi az ismétléses variáció és a Descartes szorzatnak megfelelő konstrukciók képzésére vonatkozó $/\text{átlag } 75 \text{ \%-os}/$ feladatmegoldó teljesítmény. Látható, hogy ebből a szempontból a három feladatcsoportot azonosnak mondható szinten tudják megoldani a tanulók.

A "Kombinálás" teszt ismétlés nélküli és az ismétléses kombinációk képzését igénylő 3-3 feladathoz tartozó $100 \bar{J}$ értékek átlaga megegyezik $/63 \text{ \%}/$, de 14 %-kal eltér az előzőektől. Az itteni legalacsonyabb érték 59 %, a "Variálás" teszt-nél a legmagasabb 86 %.

Látható, hogy az egyes teszteken belül kiegyenlített a feladatmegoldó teljesítmény. Kivételt képez a "Variálás" f és i feladata $/70 \text{ \%}/$ illetve az a feladata $/86 \text{ \%}/$.

Ha a vizsgálati szempont az adott feladatot hibátlanul megoldó tanulók aránya, látható, hogy ez az érték az egyes szubteszteken belül a felhasználandó elemek ill. a létrehozandó konstrukciók számának növekedésével csökken.

Látható az is, hogy a Descartes-féle szorzat feladatait oldják meg hibátlanul a legtöbben, a tanulók 65 %-a, ennél alig kevesebben az ismétlés nélküli variációk feladatait $/63 \text{ \%}/$. Az ismétléses variáció feladatait hibátlanul megoldók

aránya csökken. Igaz ez utóbbi csoportnál jelentősen "szépit" a d feladat 70,6 %-os megoldással, de a másik két feladathoz /e, f/ 50 % körüli érték tartozik.

Szembetűnő, hogy mindegyik feladatcsoport első feladatát - amelyekre a kevés kiindulási elemszám a jellemző - oldják meg hibátlanul legtöbbször és közel azonos százalékos értékkel.

A táblázat adatait vizsgálva, a megfelelő összehasonlításokat elvégezve láthatjuk, hogy a vizsgálatban résztvevő tanulók nem egységesen fejlettek a kombinatív műveletek végzésében, hanem teljesítményeik meglehetősen szélsőségesek. Ezzel együtt is megállapítható, hogy a "Variálás" teszten jobb teljesítményt értek el. Bár mindkét tesztnél a feltételeknek megfelelő jó konstrukciók jelentős százalékát /77,5 %, 74,5 %/ felírják, de a "Kombinálás" tesztnél a felesleges konstrukciók száma jelentős. Erre utal a "Kombinálás" teszt feladatát hibátlanul megoldó tanulók arányának átlaga 31 %-os értékkel, szemben a "Variálás" tesztéhez tartozó 62 %-os értékkel. A "sorrend nem számít" feltétel értelmezése, a különböző sorrendben leírt elemek adta konstrukciók azonosítása illetve megkülönböztetése okoz gondot. Ez azt jelenti, hogy a kombinációk képzésének műveleti sémái még kialakulatlanok a tanulóknak nagy részénél.

Összehasonlítva ezen statisztikai mutatók számértékeit a spontán fejlődést jellemző értékekkel látható, az új tanterv alapján történő matematika tanítással jelentős mértékű pozitív változás érhető el.

A tanulói teljesítmények színvonalát jelző 100 \bar{J} értékek "Variálás" tesztnél az új tanterv szerint tanuló vizsgált 10 éveseknél 76,5 %, a spontán fejlődés esetében ugyanezen korosztálynál 60,8 %, a 14 éveseknél 73,5 %. A "Kombinálás" teszt ugyanezen értékei rendre 63, 40,3 és 53,3 %.

Ha a kombinatív műveleti képesség színvonalára jellemzőbb adatot, a hibátlan megoldást végzett tanulók arányát vizsgáljuk ugyanezen minták esetében, még jelentősebb fejlődést láthatunk.

"Variálás" tesztnél a vizsgálatban résztvevők - akik az új tanterv szerint tanulták a matematikát - 62 %-a, a korábbi tanterv szerint tanuló 10, 14, 17 éveseknek rendre 38,6 %-a, 57,4 %-a, 57,4 %-a készítette el a feltételrendszernek megfelelő valamennyi különböző konstrukciót.

"Kombinálás" tesztnél ezek az értékek viszonylag alacsonyak- 31,1 % ill. 18,8 %, 28 %, 30 % -, de az eltérés mértéke így is szembetűnő.

A megállapításokat erősíti az 5. ábrán szemléltetett teljesítmények eloszlása, amely jobbra asszimmetrikus. Leolvasható, hogy 60 %-nál magasabb teljesítményt ért el a tanulók 75 %-a, közöttük van a 100 %-os teljesítménnyel dolgozó 39 tanuló, az összlétszám 25 %-a.

II. sz. mérés eredményeinek értékelése

A fejlesztő kísérlet céljánál említettük, hogy a felhasznált feladatgyűjtemény összeállításánál figyelembe vettük a mérési eredmények nyújtotta tapasztalatokat. Ezeket egyrészt a Csongrád megyében végzett spontán, másrészt az I. sz. méréshez tartozó - az új tanterv hatására kialakult - fejlődés vizsgálata során nyertük.

Ha a fejlesztett csoport mérési adatait /4. sz. táblázat/ megvizsgáljuk abból a szempontból, hogy az összes lehetséges jó konstrukciók hány %-át készítették el a tanulók, látható, hogy az értékek átlaga "Variálás" teszt esetében 87,6 %, a "Kombinálás" teszt esetében 87,8 %. Ez az I. sz. méréshez képest 10 ill. 13 %-kal nagyobb érték. Ez önmagában nagyon jó teljesítményt jelent, de hibátlan megoldást nyújtó tanulók arányának számából látható, hogy a "Variálás" tesztet a tanulók 76 %-a, a "Kombinálás" tesztet 61 %-a oldotta meg kifogástalanul. Ezek együtt jellemzik a tanulói megoldások jó színvonalát.

A tanulók magas teljesítményt nyújtottak abból a szempontból is, hogy a "Variálás" ill. a "Kombinálás" tesztnél a feladatok megoldásának jóságát %-ban kifejezett értékek magasak, átlaguk 86,5 ill. 80,7. Ezek az értékek is mutatnak javulást - 10 % ill. 8 % - az I. sz. méréshez képest.

A 100 \bar{J} és a hibátlan megoldáshoz tartozó gyakorisági értékek közötti különbségek nagysága utal a nem tökéletes megoldásokra, a befejezetlen felsorolások számára. Így látható, hogy a "Variálás" teszt^anál ennek az eltérésnek a mértéke jóval kisebb, mint a "Kombinálás"-nál. Mind a két mérésnél ez a jellemző, de a II. mérésnél jóval kedvezőbb helyzetet tapasztalhatunk. Ez a változás a "Kombinálás" teszt^anál igen jelentős. Míg az I. mérésnél az eltérések nagysága 27 % - 37,5 % /kivétel 19 %-os értékkel a 3 elemből 2 elemű ismétlés nélküli kombinációk képzése/, a II. mérésnél 8 % - 25 %. Mindkét teszt^anál a 4 elemből képzett 2 elemű ismétléses kombinációk esetében a legnagyobb ez az eltérés /37,5 ill. 33 %/. Tehát a "Variálás" teszt feladat^anál teljesebb megoldás a jellemző. A "Kombinálás" teszt^anál hiányosabb a felsorolás, de a fejlesztés előtti méréshez képest ennek a hiánynak a mértéke csökkent. Befejezetlen felsorolás a több konstrukció esetén jellemző. Így vizsgálatainknál a 20 különböző konstrukciót létrehozó ismétlésnélküli variációk, a 16-féle konstrukciót eredményező ismétléses variációk, a 10 különböző konstrukciót előállító ismétléses és az ismétlés nélküli kombinációk képzését jellemzi az említett hiányosság.

A tanulói megoldások színvonalát jellemezhetjük a feleslegesen felsorolt konstrukciók mennyiségével is. Ehhez meg kell vizsgálni az egyes feladatokhoz elkészített jó konstrukciók átlagának \bar{x} és a súlyozott mennyiségnek $\bar{J}\bar{T}$ a nagyságviszonyát. Az eltérés mértéke a jó, de felesleges konstruk-

ciók számának nagyságára utal. A \bar{JT} értékek az \bar{x} értékeknek "Variálás" teszt minden feladata esetében 99 %-a, a "Kombinálás" tesztnél rendre 90, 91, 95, 93, 90, 92 %-a. Ez is azt jelzi, hogy felesleges konstrukciókat az előbbi esetben ritkán ill. kis számban készítettek a tanulók. A kombináláshoz elkészített konstrukciók közül a feltételek szerint nem különbözők nagyobb számban találhatók, de a változást figyelve ez az eredmény az I. méréshez képest közel 10 %-kal jobb.

A jó konstrukciók számához tartozó variációs koefficiensek értékei viszonylag alacsony ill. többségében közepes szórást jeleznek. Ezek átlaga a "Variálás" tesztnél 29 % a "Kombinálás"-nál 25 %. Ezt az I. sz. mérésnél tapasztaltakkal /44,3 % ill. 38,8 %/ összevetve, azt a fejlődést jelzi, hogy a mezőny nem annyira heterogén már. Kevesebb a szélsőséges értékű megoldás.

A statisztikai jellemzők feladatonként ill. feladatcsoportonként is adnak képet a vizsgált csoportról.

A feladatmegoldás jóságának %-ban kifejezett értéke alapján a feladatgyűjteménnyel fejlesztett csoportot egyaránt magas teljesítmény jellemzi az ismétlés nélküli variációk /89 %/, ismétléses variációk /86 %/ a Descartes-féle szorzatnak megfelelő konstrukciók /88 %/ és az ismétlés nélküli kombinációk /84 %/ képzése során. Ettől a szinttől csak kis mértékben tér el az ismétléses kombinációkhoz tartozó /77 %/ érték. Az egyes

feladatesoportokon belül az értékek kiegyenlítették, a feladat bonyolultságának megfelelően kis mértékben csökkennek. Összehasonlítva az egyes szubtesztekhez tartozó I. és II. mérés során nyert értékeket, látható, hogy a legnagyobb méretű ez a fejlődés az ismétlés nélküli kombinációk képzése során - átlagosan 21 %-, ezt követi az ismétléses kombinációkhoz tartozó - átlagosan 15 % -, majd az ismétlés nélküli -, az ismétléses variáció és a Descartes-féle szorzathoz tartozó, valamennyi esetében megegyező - 10 % - érték.

A tanulói teljesítmények szempontjából kialakított sorrendnek nem mond ellent az a tény, hogy a legtöbb tanuló a Descartes-féle szorzat és az ismétlés nélküli variációk képzése során készítette el a konstrukciók hibátlan felsorolását /a tanulók 77,4 %-a ill. 76,8 %-a/. Szinte alig tér el ettől az értéktől az ismétléses variációkhoz tartozó hibátlan megoldást nyújtó tanulók aránya /72,3 %/. Ezt követi az ismétlés nélküli kombinációkat hibátlanul felsoroló tanulók /66,7 %/ és a valamennyi ismétléses kombinációt csak egyszer feltüntető tanulók aránya /55,2 %/. Látható, hogy a felhasználandó elemszám ill. a létrehozandó konstrukciók számának növekedésével párhuzamosan, egyre kevesebb tanuló ad hibátlan felsorolást az egyes szubteszteken belül.

A tanulók/86 %/a 3 elemből képzett 2 elemű ismétlés nélküli variációk és 2 kiindulási elem esetén a 2 elemű ismétléses variációhoz tartozó a konstrukciók mindegyikét elkészítette,

egyét sem ismételve. E két feladathoz viszonylag alacsony szórás érték tartozik, mert a variációs koefficiens értéke 20 %. A "Variálás" teszt feladatainál a megoldások 82 % feletti magas mutatói valamint a hibátlan megoldást adó tanulók száma, jelentős fejlődést mutat az I. sz. mérés adataihoz képest.

A tanulói teljesítmények igen magas színvonalúak. A nagy arányú fejlődést jól illusztrálhatjuk, ha összehasonlítjuk a feldusított kombinatorika anyaggal dolgozó fejlesztési programban résztvevők teljesítményét azoknak a tanulóknak /10-, 14-, 17 évesek/ a teljesítményével is, akik a régi tanterv szerinti matematika oktatásban részesültek.

A "Variálás" teszt feladatai esetében az értékek /100 \bar{J} / átlaga: 86,5 % - 60,8 %, 73,5 %, 81,5 % .

Míg az irányítottan fejlesztettek 76 %-a, addig a spontán fejlődés eredményeként a 10 évesek 38,6, a 14 évesek 57,4, a 17 évesek 57,4 %-a adott teljesen hibátlan megoldást.

A "Kombinálás" teszt feladatainak megoldásainál - ha összességükben alacsonyabb teljesítményt mutatnak is - a fent említett tanulócsoportok adatainak összehasonlítása révén még jelentősebb fejlődést tapasztalunk. A megoldások jószágmutatói /100 \bar{J} /: 80,7 % - 40,3 %, 53 %, 53 %.

Hibátlan megoldást a tanulók 61 %-a ill. 19-, 28-, 31 %-a készített.

Megállapítható, hogy a befejezetlen felsorolások számában is lényeges a különbség a fejlesztett csoport javára.

Felesleges konstrukciót keveset készítenek a II. mérésben résztvett tanulók a "Variálás" teszt feladatainál, a "Kombinálás"-nál valamivel többet. Azok a tanulók akik még nem az új tanterv szerint tanultak jelentősebb számú, a feladatrendszer szerint nem különbözőnek számító konstrukciót alkotnak az ismétléses és az ismétlés nélküli kombinációk képzése során.

Kedvező a változás abból a szempontból is, hogy a variációs koefficiensek értékei alapján azt mondhatjuk, hogy ezek az értékek nem szélsőséges színvonalu megoldások eredményei.

A korrelációs együtthatókat /5. táblázat/ vizsgálva megállapítható, hogy az egyes szubteszteken belül a feladatok igen szorosan összefüggnek. A viszonylag magas értékek lehetséges okaival most nem foglalkozunk, csupán a két mérés adatainak összehasonlítása során tapasztalható jelenségre hívjuk fel a figyelmet. A II. méréshez tartozó alacsonyabb értékek is arra utalnak, hogy a szórások kisebbek, a teljesítmények növekedtek, a tanulók zöme azonos fejlettségi szintet ért el.

Ha megvizsgáljuk a teljesítmények eloszlását /5. ábra/, láthatjuk, hogy erősen jobbra asszimmetrikus, jelezve, hogy a műveletek fejlettsége igen magas szinten van, az átlag

84,3 %p. 80 %-nál magasabb teljesítményt ért el a tanulók 75 %-a, közöttük 76 tanuló /45 %/ a feltételrendszernek megfelelő konstrukciók hibátlan felsorolását adta. A teljesítmények kiegyenlítetttségét jelzi a fejlesztett csoporthoz tartozó 21,6 %-os relatív szórás is. Az alacsonyabb pontszámhoz tartozó kis gyakorisági értékek is bizonyítják, hogy a vizsgált kombinatív műveletek minden tanulónál magas szinten ki-
fejlődtek.

Összegezés

Munkánk során arra kerestünk választ, hogy a kombinatív műveletek rendszerbe szerveződésével kialakuló kombinatív képesség fejleszthető-e, és a fejlesztés mértéke miben nyilvánul meg.

Viszogatunkat jól időzítettük abból a szempontból, hogy ekkor ért fel másodszor 4. osztályig az új matematika tanterv szerint tanulók teljes szélességű skálája. Így rendelkezésünkre állt egy olyan összehasonlítási lehetőség, amely szerint vizsgálhattuk a spontán fejlődés /10-, 14-, 17 évesek/ és az új tanterv alapján biztosított fejlődés /10 évesek/ eredményeit.

Láthattuk, hogy a 10 éves gyerekek formális szinten eljuthatnak a fejlettségnek arra a fokára, amelyen a spontán fejlődéssel a 17 évesek állnak, és meghaladhatják a 14 éveseket ezen a téren a vizsgálati szempontok szerint. Ez meg nyilvánult a feladatmegoldó teljesítmények értékében, és azon tanulók számában akik hibátlan megoldást adtak. A tanulói megoldások még ugyan elég heterogének, de megegyezők ebből a szempontból a 17 évesekével és egységesebbek a 10 és 14 évesekénél. Csökkent a feleslegesen felírt konstrukciók száma, nőtt a teljes megoldást adó felsorolások száma. Ugy gondoljuk, hogy a tanulók nem általában soroltak fel többet a jó konstrukciók közül, és ezáltal jobb az eredmények, hanem megnőtt azon tanulók száma akik valamennyi konstrukciót megtaláltak, és ki tudták választani az ekvivalensnek számítókat.

Tudjuk, hogy ^{nemcsak} a matematika tanítása járult hozzá a fejlődéshez, hanem az egész új koncepció szerinti oktató-nevelő munka. A vizsgálat elméleti háttérénel tett indoklás alapján úgy véljük, hogy a legnagyobb hatást a kombinatív képesség fejlődésére mégis az új matematika tanterv anyagával, módszereivel értük el.

Gyakorlati tapasztalataink alapján, ismerve az új tanterv célkitűzéseinek megvalósítására jellemző nehézségeket, problémákat, úgy gondoltuk, hogy jelentős ugyan a fejlődés, de nem olyan mértékű, mint amilyen változási lehetőséget magában rejt, ha következetesen alkalmazzák az új módszertani elveket, maradéktalanul feldolgozzák a tananyagot az évvégi követelmény szint figyelembevételével. Tapasztalhattuk azt is, hogy a bizonyos tanári szabadságot adó lehetőségek némelyek számára alkalmat adnak bizonyos matematikai témák elhanyagolására, a nem alapos, a célokat nem jól szolgáló feldolgozási mód alkalmazására. Sajnos a kombinatorika is olyan téma, amelyet hajlamosak néhányan nem a szerepének megfelelő sulyal kezelni. /Az okokat érdemes lenne megvizsgálni./

A kombinatív képesség hipotetikus modelljét felhasználva, összeállítottunk egy fejlesztő feladatgyűjteményt 4. osztályos tanulók számára, amely nemcsak a kombinatorika témát szolgálta, hanem kapcsolódott a matematika tananyag más témáihoz is. A tantervi keretek között folyó fejlesztőmunka eredményeit megvizsgálva jelentős fejlődést tapasztalhattunk

azokhoz a 4. osztályos tanulókhoz képest is, akik már az új tanterv szerinti matematika oktatásban részesültek és eredményeik nagy mértékben meghaladták a spontán fejlődők eredményeit. A tanulói teljesítmények egységesebbek lettek. Jelentősen csökkent a felesleges konstrukciók száma, nagy mértékben nőtt a hibátlan felsorolások száma. Összehasonlítást végezve az új tanterv szerint tanuló 8. osztályos tanulókkal, látható, hogy a fejlesztett csoport tagjai a vizsgálat minden területén megközelítették a 14 éveseket.

Az eredmények alapján kijelenthetjük, hogy a fejlesztési programban résztvevőknél a kételemű konstrukciók képzésére formális szinten kialakultak bizonyos kombinatív műveletek.

A negyedik osztály dokumentumait vizsgálva úgy gondoljuk, hogy megteremtik ugyan a képességfejlesztés lehetőségét, de - a korábban említetteken túl - a feladatok mennyisége, bizonyos kombinatorikai műveletek /pl. kombinációk/ óvatos kezelése nem szolgálja maximális szinten a kombinatív képességfejlesztést.

A korábbi részletes elemzés alapján látható, hogy megfelelő fejlesztési programmal a tanulók jelentős részénél kialakulnak bizonyos pszichikus szabályozási rendszerek, amelyek elvezetnek az összes - a feltételrendszernek megfelelő - összesállítás felsorolásához, tehát a kombinatív képesség jelentős mértékben fejleszthető.

I R O D A L O M

- Ágoston György /1973/: Nevelésselmélet
Tankönyvkiadó, Budapest
- Ágoston György /1976/: A pedagógia alapfogalmai és a nevelési
célrendszer
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Ágoston Gy. - Nagy J. - Orosz S. /1979/: Mérések módszerei a
pedagógiában
Tankönyvkiadó, Budapest
- Bakonyi Pál /1973/: Tanterv és képességfejlesztés
Köznevelés, 1973. 37. sz. 11-13. o.
- Brunner, J.S. /1974/: Új utak az oktatás elméletéhez
Gondolat Kiadó, Budapest
- Cervenakné Neményi Eszter /szerk. 1982./: Kézikönyv a matematika
4. osztályos anyagának tanításához
Tankönyvkiadó, Budapest
- Csapó Benő /1979/: A kombinatív képesség és értékelésének fel-
tételi
Akta Univ. Szeg. de A.J. nom. Sectio Paed. et Psych. Ser
Spec. Paed., Szeged
- Csapó Benő /1983/: A kombinatív képesség és műveleteinek vizsgálá-
ta 14 éves tanulóknál
Magyar Pedagógia, 1983. 1. sz. 31-50. o.
- Csapó Benő /1985/: A struktúra és a tartalom hatásának vizsgálata
izomorf strukturájú kombinatorikai feladatokban
Magyar Pszichológiai Szemle, 1985. 1. sz. 19-34. o.
- Dienes Zoltán /1973/: Építsük fel a matematikát
Gondolat Kiadó, Budapest
- Halmos Istvánné /szerk. 1982/: Matematikamunkalapok 4. osztály
Tankönyvkiadó, Budapest
- Jász Lajosné /szerk. 1976/: Úton a matematika tanítás reformja
felé. Új utak a matematika tanításában 3.
Tankönyvkiadó, Budapest
- Jóboru Magda /1971/: Egyéni képesség-tehetség-iskola
Társadalmi Szemle, 1971. 11. 66-72. o.

- Kelemen László /1973/: Iskola, hivatás, tehetség
Pedagógiai Szemle, 1973. 6. sz. 570-573. o.
- Kelemen László /1981/: A képességfejlesztés pszichológiai alapjai, különös tekintettel a megismerő képességek fejlesztésére
A 18. Szegedi Pedagógiai Nyári Egyetem Előadásai Szeged, 145-169. o.
- Klein Sándor /1980/: A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Kornidesz Mihály /1971/: Közoktatáspolitikánk időszerű kérdései
Pártélet, 1971. 8. sz. 28-33. o.
- Kovács Zoltán /1981/: Matematika 4. osztály
Tankönyvkiadó, Budapest
- Kunstár Jánosné /1977/: Feladatgyűjtemény az általános iskola ideiglenes matematika tanterveihez
/Módszertani Közlemények Könyvtára 6./ Szeged
- Landau, E. /1974/: A kreativitás pszichológiája
Tankönyvkiadó, Budapest
- Lénárd Ferenc /1978/: A problémamegoldó gondolkodás
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Lénárd Ferenc /1979/a/: A képességek fejlesztése a tanítási órán
Tankönyvkiadó, Budapest
- Lénárd Ferenc /1979/b/: A közoktatás fejlesztése és a pszichológia
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Lénárd Ferenc /1981/: Tételek a képességfejlesztésről és a tehetséggondozásról
A 18. Szegedi Pedagógiai Nyári Egyetem Előadásai Szeged, 82-105. o.
- Leontyev A.N. /1964/: A pszichikum fejlődésének problémái
Kossuth Könyvkiadó, Budapest
- Lovász László - Vesztergombi Katalin - Pelikán József /1971/:
Kombinatorika az általános és középiskolai matematika szakkörök számára
Tankönyvkiadó, Budapest

Nagy József /1979/: Köznevelés és rendszerszemlélet

Országos Oktatástechnikai Központ, Veszprém

Nagy József /1980/: A tudás létezési módjai, megjelenési formái és funkciói

Acta Univ. Szeg. de A.J. nom. Sectio Paed. et Psych. 22.
Szeged

Nagy József /1983/: A művelési képességek rendszere

Acta Univ. Szeg. de A.J. nom. Sectio Paed. et Psych. 25.
Szeged 81-96. o.

Néhány hazai és külföldi kísérlet

/Új utak a matematika tanításában I./, 1972.

Tankönyvkiadó, Budapest

Pedagógiai Lexikon II. kötet /1977/

Akadémiai Kiadó, Budapest

Piaget, J. - Inhelder, B. /1967/: A gyermek logikájától az ifju logikájáig

Akadémiai Kiadó, Budapest

Piaget, J. /1970/: Válogatott tanulmányok

Gondolat Kiadó, Budapest

Pólya György /1977/: A gondolkodás iskolája

Gondolat Kiadó, Budapest

Rubinstein, Sz. L. /1964/: Az általános pszichológia alapjai

Akadémiai Kiadó, Budapest

Rubinstein, Sz. L. /1967/: Lét és tudat

Kossuth Könyvkiadó, Budapest

Salamon Jenő /1973/: A gyakorlati problémamegoldás fejlődése

6-14 éves korban

Akadémiai Kiadó, Budapest

Salamon Jenő /1981/: Az értelmi képességek fejlődése és fejlesztetősége

A 18. Szegedi Pedagógiai Nyári Egyetem Előadásai Szeged,
126-144. o.

Skemp, R.R. /1975/: A matematika-tanulás pszichológiája
Gondolat Kiadó, Budapest

Solt György /1985/: Valószínűségszámítás /példatár/
Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Szebenyi Péter /szerk. 1978/: Az általános iskolai nevelés és
oktatás terve

Országos Pedagógiai Intézet, Budapest

Varga Tamás /1966/: Komplex módszer a 6 éves kortól kezdődő
matematika tanításban. Korszerű módszerek és eszközök
az iskolareform szolgálatában
Tankönyvkiadó, Budapest